

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

С.Е. Муравьев

**ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ
«РОСАТОМ-2009» ПО ФИЗИКЕ
(С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ)**

Москва 2009

УДК 53(076)
ББК 22.3я7
М 91

Муравьев С.Е. **ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ «РОСАТОМ-2009» ПО ФИЗИКЕ (С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ): Учебно-методическое пособие.** – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 84 с.

Сборник содержит задачи олимпиады школьников «Росатом» за 2008 – 2009 учебный год по физике. Все задачи снабжены решениями.

Предназначен для учащихся школ и лицеев с углубленным изучением физики. Работа с данным пособием поможет подготовиться к участию в олимпиадах и поступлению в НИЯУ МИФИ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Е. Городничев

Рекомендовано к изданию редсоветом НИЯУ МИФИ

ISBN 978-5-7262-1212-8

© *Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», 2009*

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4	
	Задачи	Решения
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ТУРЫ ОЛИМПИАДЫ	5	25
Олимпиада памяти И.В. Савельева, г. Москва, 7 декабря 2008 г.....	5	25
Олимпиада памяти И.В. Курчатова, г. Москва, 8 февраля 2009 г.....	6	28
Пробный экзамен в форме ЕГЭ, г. Москва, 1 марта 2009 г.....	7	32
Пробный экзамен в форме ЕГЭ, г. Москва, 22 марта 2009 г.....	10	37
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТУРЫ ОЛИМПИАДЫ	14	43
г. Москва, 5 апреля 2009 г.	14	43
г. Москва, 9 апреля 2009 г.	14	46
г. Балаково, апрель 2009 г.....	16	51
г. Мирный, апрель 2009 г.....	17	54
г. Новгород, апрель 2009 г.....	18	58
г. Новоуральск, Северск, апрель 2009 г.	18	64
г. Обнинск, апрель 2009 г.	19	66
гг. Саров, Электрогорск, апрель 2009 г.	20	67
г. Смоленск, апрель 2009 г.....	21	71
г. Снежинск, март 2009 г.	22	73
г. Томск, апрель 2009 г.....	23	76

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение ряда лет Московский инженерно-физический институт проводит в Москве, крупных научных и промышленных центрах Государственной корпорации «Росатом» всероссийскую физико-математическую олимпиаду «Росатом». Олимпиада «Росатом» входит в перечень олимпиад школьников, и ее победители имеют существенные льготы при поступлении в вузы. За годы проведения олимпиады «Росатом» этой возможностью воспользовались тысячи школьников.

В настоящем пособии собраны все задачи олимпиады «Росатом», проводимой в 2008 – 2009 учебном году. Ко всем задачам даны подробные решения. Задачи, собранные в пособии, позволят новым поколениям абитуриентов почувствовать уровень олимпиады «Росатом», проверить свои силы при подготовке к олимпиадам будущих лет.

С.Е. Муравьев

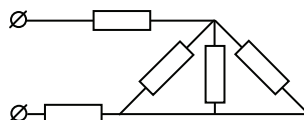
ЗАДАЧИ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ТУРЫ ОЛИМПИАДЫ

Олимпиада памяти И.В. Савельева,
г. Москва, 7 декабря 2008 г.

1. Во сколько раз изменится сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов, если величину одного из зарядов увеличить в n раз, а расстояние между зарядами уменьшить в k раз?

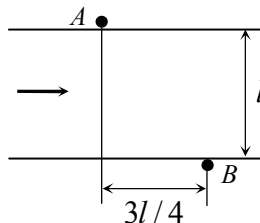
2. Найти сопротивление электрической цепи, изображенной на рисунке. Все сопротивления цепи одинаковы и равны $r = 1$ Ом. Сопротивлениями соединительных проводов пренебречь.



3. Тело массой m , брошенное под углом к горизонту, имеет в верхней точке траектории ускорение $a = 4g/3$ (g – ускорение свободного падения). Определить силу сопротивления воздуха в этой точке.

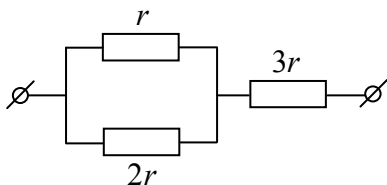
4. Идеальный одноатомный газ расширяется сначала адиабатически (без подвода тепла), а затем изобарически, причем так, что его конечная температура равна начальной. Известно, что в адиабатическом процессе газ совершил работу A . Какое количество теплоты получил газ в изобарическом процессе?

5. Лодка переправляется из пункта B , расположенного на одном берегу реки шириной l , в пункт A , расположенный на другом берегу выше по течению на расстоянии $3l/4$ от пункта B (см. рисунок). В процессе переправы лодочник в каждый момент времени направляет нос лодки в



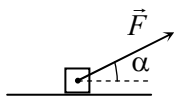
направлении пункта A , мотор развивает постоянное усилие. Известно, что скорость, которую имела бы лодка в стоячей воде, равна скорости течения реки. На каком расстоянии от пункта A будет находиться лодка, когда дойдет до середины реки?

**Олимпиада памяти И.В. Курчатова,
г. Москва, 8 февраля 2009 г.**



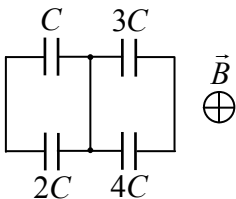
1. Три сопротивления r , $2r$ и $3r$ включены в электрическую сеть так, как показано на рисунке. К схеме приложено напряжение U . Какая мощность выделяется на сопротивлении r ?

2. К потолку прикреплена пружина. Если к пружине подвесить груз, ее длина будет равна l_1 . А если к пружине подвесить груз вдвое большей массы, ее длина будет равна l_2 . Найти длину пружины в недеформированном состоянии.



3. На горизонтальную поверхность аккуратно положили тело массой $m = 1$ кг, а затем действовали на него силой $F = 5$ Н, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,5$. Найти силу трения, действующую на тело. Ответ обосновать.

4. В вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится идеальный газ. Чтобы уменьшить объем газа в 2 раза, на поршень надо положить груз массой m . Какой еще груз надо положить на поршень, чтобы уменьшить объем газа еще в 2 раза? Температура поддерживается постоянной.



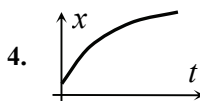
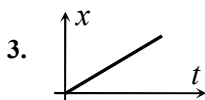
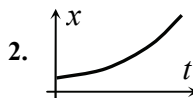
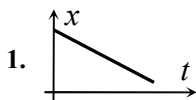
5. Контур в форме квадрата со стороной a имеет проводящую перемычку, делящую квадрат пополам. В левую и правую половины контура включены конденсаторы с емкостями C , $2C$ и $3C$, $4C$ (см. рисунок). Контур помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное его плоскости и квадра-

точно возрастающее со временем $B(t) = \alpha t^2$, где α – известная постоянная. Какой заряд протечет по перемычке к моменту времени τ ?

**Пробный экзамен в форме ЕГЭ,
г. Москва, 1 марта 2009 г.**

Раздел А

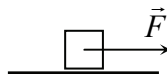
А1. На рисунках приведены графики зависимости координаты четырех прямолинейно движущихся тел от времени. У какого из этих тел скорость убывает?



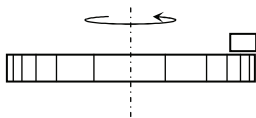
А2. Тело бросили под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Кинетическая энергия тела в момент броска 1 Дж. Какую работу совершит над телом сила тяжести к моменту его подъема на максимальную высоту?

1. $-0,25$ Дж. 2. $-0,5$ Дж. 3. $-0,75$ Дж. 4. -1 Дж.

А3. Тело массой $m = 1$ кг положили на горизонтальную опору. Коэффициент трения между телом и опорой $\mu = 0,1$. Затем на тело действовали горизонтальной силой $F = 0,5$ Н. Чему равна сила трения, действующая на это тело со стороны опоры? $g = 10$ м/с².



1. $F_{\text{тр}} = 0$. 2. $F_{\text{тр}} = 0,5$ Н. 3. $F_{\text{тр}} = 1$ Н. 4. $F_{\text{тр}} = 2$ Н.



A4. Тело находится на краю горизонтального шероховатого вращающегося диска и вращается вместе с ним (см. рисунок). Какие силы действуют на тело?

1. Тяжести, трения и реакции опоры.
2. Тяжести, трения, реакции опоры и центростремительная.
3. Тяжести, трения, реакции опоры и центробежная.
4. Тяжести, трения, реакции опоры, центростремительная и центробежная.

A5. Зависимость координаты материальной точки от времени дается законом: $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Чему равна амплитуда колебаний?

1. \sqrt{AB} .
2. $A + B$.
3. $\frac{A+B}{2}$.
4. $\sqrt{A^2 + B^2}$.

A6. Температуру газа в сосуде увеличивают от 25 до 125 °С. Во сколько примерно раз возрастает при этом средняя скорость молекул газа?

1. В 5 раз.
2. В $\sqrt{5}$ раз.
3. В $4/3$ раз.
4. В $2/\sqrt{3}$ раз.

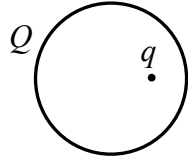
A7. Телу массой m , вещество которого имеет удельную теплоемкость c , сообщили количество теплоты Q . На какую величину ΔT изменилась температура тела?

1. $\Delta T = -\frac{Q}{cm}$.
2. $\Delta T = \frac{cm}{Q}$.
3. $\Delta T = \frac{Q}{cm}$.
4. $\Delta T = -\frac{cm}{Q}$.

A8. Два одинаковых металлических шарика, заряженных зарядами одного знака, находятся на расстоянии, много большем их размеров. Шарiki приводят в соприкосновение, а затем разводят на первоначальное расстояние. Что можно сказать о величине силы взаимодействия шариков?

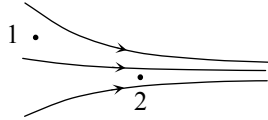
1. Увеличится независимо от величин первоначальных зарядов.
2. Уменьшится независимо от величин первоначальных зарядов.
3. Может как увеличиться, так и уменьшиться в зависимости от величин первоначальных зарядов.
4. Не изменится независимо от величин первоначальных зарядов.

A9. Точечный заряд q находится внутри сферы радиусом R , заряженной зарядом Q на расстоянии $R/2$ от центра сферы (см. рисунок). Какая сила действует на точечный заряд со стороны сферы?
 $k = 1/4\pi\epsilon_0$.



1. $F = \frac{kQq}{R^2}$. 2. $F = \frac{4kQq}{R^2}$. 3. $F = 0$. 4. $F = \frac{2kQq}{R^2}$.

A10. На рисунке приведена картина силовых линий электрического поля, созданного некоторой системой зарядов (на рисунке эти заряды не показаны). Сравнить величину напряженности поля в точках 1 и 2.



1. $E_1 > E_2$. 2. $E_1 < E_2$. 3. $E_1 = E_2$.
 4. Информации для ответа недостаточно.

A11. В опытах по наблюдению электромагнитной индукции квадратная рамка из тонкого провода со стороной a находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки. Индукция поля равномерно возрастает от значения B до значения $2B$. Как в течение этого процесса изменяется ЭДС индукции в рамке?

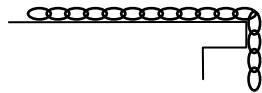
1. Увеличивается в 2 раза. 2. Уменьшается в 2 раза.
 3. Не изменяется. 4. Увеличивается в 4 раза.

A12. Период полураспада некоторого радиоактивного изотопа равен T . В начальный момент имеется N атомов этого вещества. Сколько атомов этого вещества останется через время $3T$?

1. $N/3$. 2. $N/6$. 3. $N/8$. 4. $N/9$.

Раздел В

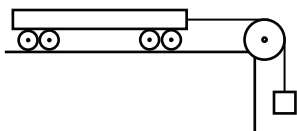
B1. Около края стола лежит цепочка. Известно, что цепочка начинает соскальзывать, если со стола свешивается ее шестая часть длины (см. рисунок). Найти коэффициент трения между цепочкой и столом.



В2. Расстояние между точечным предметом, находящимся на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы, и его изображением в линзе равно половине ее фокусного расстояния. Определить отношение размера изображения к размеру предмета.

Раздел С

С1. В баллоне содержится ν молей одноатомного идеального газа при температуре T . При изохорическом нагревании газа средняя скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найти количество теплоты, подведенное к газу.



С2. Четырехосная тележка, находящаяся на шероховатой горизонтальной поверхности, связана нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок, с висющим грузом (см. рисунок). Тележку отпускают и она движется с некоторым ускорением. Опыт повторяют, заблокировав одну из осей тележки (колеса этой оси перестают вращаться). При этом ускорение тележки уменьшается в n раз. Во сколько еще раз уменьшится ускорение тележки, если заблокировать колеса еще одной оси? Трением качения пренебречь, масса колес мала по сравнению с массой тележки. Считать, что сила реакции распределяется равномерно по всем колесам.

Пробный экзамен в форме ЕГЭ, г. Москва, 22 марта 2009 г.

Раздел А

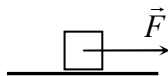
А1. Минутная стрелка в два раза длиннее часовой. Во сколько раз линейная скорость конца минутной стрелки больше линейной скорости конца часовой?

1. В 12 раз. 2. В 24 раза. 3. В 36 раз. 4. В 48 раз.

А2. Две команды играют в игру «перетягивание каната». Каждая тянет канат с силой 5000 Н. Чему равна сила натяжения каната?

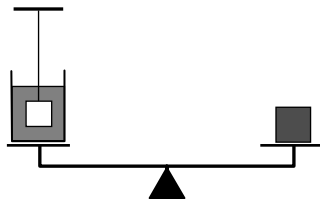
1. 5000 Н. 2. 10000 Н. 3. 2500 Н. 4. $5000 \cdot \sqrt{2}$ Н.

A3. Тело массой $m = 1$ кг положили на горизонтальную опору. Коэффициент трения между телом и опорой $\mu = 0,1$. Затем на тело действовали горизонтальной силой $F = 2$ Н (см. рисунок). Чему равна сила трения, действующая на тело? $g = 10$ м/с².



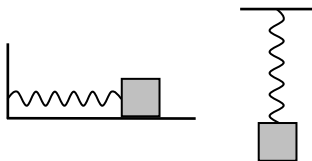
1. $F_{\text{тр}} = 0$. 2. $F_{\text{тр}} = 0,5$ Н. 3. $F_{\text{тр}} = 1$ Н. 4. $F_{\text{тр}} = 2$ Н.

A4. На весах уравновешен сосуд с водой. В воду опускают тело массой m , подвешенное на нити. Плотность тела в четыре раза больше плотности воды, оно не касается дна и стенок, вода из сосуда при погружении тела не вливается. Нарушится ли равновесие весов, и если да, то груз какой дополнительной массы нужно положить на вторую чашку весов, чтобы сохранить их равновесие?



1. $m/4$. 2. Не нарушится, так как тело не касается дна сосуда.
3. $m/2$. 4. m .

A5. Сравнить период колебаний груза, совершающего колебания на гладкой горизонтальной поверхности под действием пружины T_1 (левый рисунок), и того же самого груза, подвешенного к той же самой пружине в поле силы тяжести T_2 (правый рисунок).



1. $T_1 > T_2$. 2. $T_1 < T_2$. 3. $T_1 = T_2$. 4. Это зависит от массы тела.

A6. Имеются два одинаковых сосуда, в которых находятся: 1 моль азота N_2 в одном; смесь 1 г водорода H_2 и $3 \cdot 10^{23}$ молекул гелия He в другом. Температуры газов одинаковы. Где больше давление?

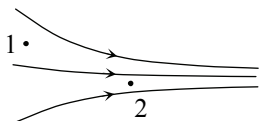
1. Где азот.
2. Где смесь газов.
3. Одинаково.
4. Зависит от объема сосудов.

A7. Тепловой двигатель, КПД которого равен 25 %, в течение цикла совершает работу 100 Дж. Какое количество теплоты двигатель отдает холодильнику за цикл?

1. 150 Дж. 2. 200 Дж. 3. 250 Дж. 4. 300 Дж.

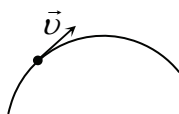
A8. Два одинаковых металлических шарика, заряженных зарядами противоположных знаков, находятся на расстоянии, много большем их размеров. Шарiki приводят в соприкосновение, а затем разводят на первоначальное расстояние. Что можно сказать о величине силы взаимодействия шариков?

1. Увеличится независимо от величин первоначальных зарядов.
 2. Уменьшится независимо от величин первоначальных зарядов.
 3. Может как увеличиться, так и уменьшиться в зависимости от величин первоначальных зарядов.
 4. Не изменится независимо от величин первоначальных зарядов.



A9. На рисунке приведена картина силовых линий электрического поля, созданного некоторой системой зарядов (на рисунке эти заряды не показаны). Сравнить потенциал поля в точках 1 и 2.

1. $\varphi_1 > \varphi_2$. 2. $\varphi_1 < \varphi_2$. 3. $\varphi_1 = \varphi_2$.
 4. Информации для ответа недостаточно.



A10. На рисунке показана траектория электрона, движущегося в магнитном поле. Траектория лежит в плоскости чертежа. Как направлен вектор индукции этого магнитного поля? Другие силы на электрон не действуют.

1. \uparrow . 2. \searrow . 3. \odot . 4. \otimes .

A11. Как изменяется индуктивность замкнутого проводника с током при увеличении тока в нем в два раза?

1. Увеличивается в 2 раза. 2. Уменьшается в 2 раза.
 3. Не изменяется. 4. Увеличивается в 4 раза.

A12. Фотоны с энергией 2,1 эВ вызывают фотоэффект с поверхности цезия, у которого работа выхода равна 1,9 эВ. Чтобы увели-

чить максимальную энергию фотоэлектронов в два раза, на сколько нужно повысить энергию фотонов?

1. На 0,1 эВ. 2. На 0,2 эВ. 3. На 0,3 эВ. 4. На 0,4 эВ.

Раздел В

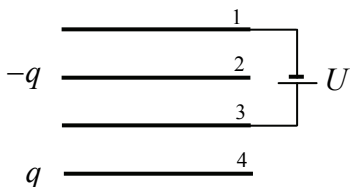
В1. Два тела массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 5$ кг, связанные нитью, находятся на гладкой горизонтальной плоскости. Максимальная сила натяжения, которую выдерживает нить, равна $T_0 = 10$ Н. На одно из тел действуют горизонтальной силой. Найти максимально возможное ускорение системы. Ответ привести в единицах СИ.

В2. Какую работу совершил при изобарическом расширении идеальный газ, если количество вещества газа равно 1 моль, а температура газа возросла в этом в этом процессе на 10 °С? Ответ привести в джоулях, округлив его до целых.

Раздел С

С1. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением из некоторой точки. Известно, что тело останавливается через время τ после выхода из начальной точки на расстоянии S от нее. Какую скорость имело тело через время τ/n после выхода из начальной точки?

С2. Четыре одинаковые пластины площадью S расположены параллельно друг другу на одинаковых расстояниях d . Вторая и четвертая пластина заряжены зарядами q и $-q$ ($q > 0$), первая и третья соединены с источником напряжения



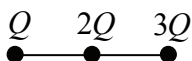
U . Найти разность потенциалов между второй и четвертой пластинами $\varphi_2 - \varphi_4$. Расстояние d много меньше размеров пластин.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТУРЫ ОЛИМПИАДЫ

г. Москва, 5 апреля 2009 г.

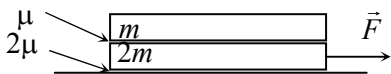
1. Две пятых части пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшуюся часть – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. Тело массой m налетает на первоначально покоящееся тело массой $2m$. Происходит центральное абсолютно неупругое столкновение. Найти количество выделившейся при ударе теплоты.

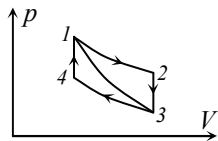


3. Три точечных заряда Q , $2Q$ и $3Q$ связаны двумя нитями одинаковой длины a (см. рисунок). Найти силу натяжения нити, связывающей заряды $2Q$ и $3Q$.

4. Две доски массами m и $2m$ находятся на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между досками – μ , между нижней доской и поверхностью – 2μ . На нижнюю доску действует некоторая горизонтальная сила \vec{F} .



При каком минимальном значении силы F между досками возникнет проскальзывание?



5. На рисунке представлены графики ряда циклических процессов, проходящих с идеальным газом. Процессы 1-2 и 3-4 – изотермические, 2-3 и 4-1 – изохорические, 1-3 – адиабатический. Известно, что КПД циклического процесса 1-2-3-1 равен η_1 , а температура газа на «верхней» изотерме вдвое больше температуры газа на «нижней» изотерме. Найти КПД цикла 1-2-3-4-1. Ответ обосновать.

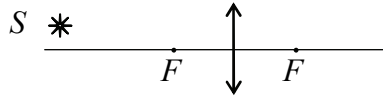
г. Москва, 9 апреля 2009 г.



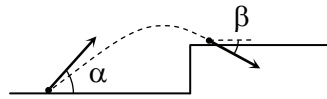
1. Тело массой m , движущееся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает на пружину с жесткостью k , второй конец которой

закреплен. На какую величину сожмется пружина к тому моменту времени, когда скорость тела уменьшится вдвое? Трение отсутствует.

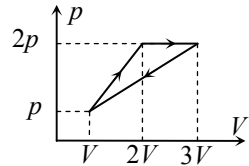
2. Построить изображение точечного источника S в тонкой собирающей линзе. Источник расположен на расстоянии $3F$ от плоскости линзы и на расстоянии x от главной оптической оси. Найти расстояние от изображения источника до главной оптической оси.



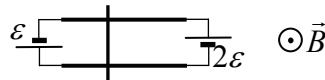
3. Тело бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . В процессе движения тело попадает на ступеньку высотой h (см. рисунок). Под каким углом β тело подлетит к ступеньке?



4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах $p-V$ приведен на рисунке. Найти КПД процесса. Все необходимые величины даны на рисунке.



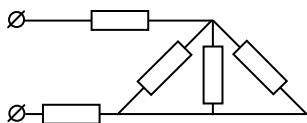
5. Параллельные горизонтальные рельсы длиной L и с сопротивлением единицы длины ρ закреплены параллельно друг другу на расстоянии l друг от друга.



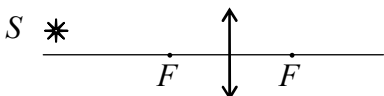
К концам рельс присоединены две батареи: одна с ЭДС ε , вторая – с ЭДС 2ε . На рельсы кладут переключку массой m , которая может скользить вдоль рельсов. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B (см. рисунок, вид сверху). На каком расстоянии от левого края рельсов находится положение равновесия переключки? Найти период малых колебаний переключки около положения равновесия. Трением, сопротивлением переключки, источников и проводов, а также индуктивностью цепи пренебречь.

г. Балаково, апрель 2009 г.

1. Тело массой m , движущееся со скоростью v , налетает на покоящееся тело массой $5m$ и после столкновения движется со скоростью $v_1 = v/2$ в направлении, перпендикулярном первоначальному. Найти величину скорости второго тела v_2 после столкновения. Под каким углом α к направлению движения первого тела полетит второе?

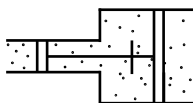


2. Найти сопротивление электрической цепи, изображенной на рисунке. Все сопротивления цепи одинаковы и равны $r = 1$ Ом. Сопротивлениями соединительных проводов пренебречь.



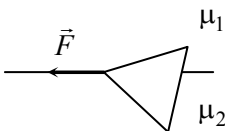
3. Построить изображение точечного источника S в тонкой собирающей линзе. Источник расположен на расстоянии $3F$ от плоскости линзы и на расстоянии

x от главной оптической оси (см. рисунок). Найти расстояние от изображения источника до главной оптической оси.



4. Две открытые с обоих концов трубы с площадями сечений S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$) состыкованы между собой. В них вставлены соединенные стержнем поршни, которые при температуре T_0 расположены на одинаковых расстояниях от стыка.

Между поршнями находится идеальный газ. При какой температуре газа между поршнями левый поршень сместится вправо до стыка труб?



5. Вырезанный из листа фанеры равнобедренный треугольник массой m тянут за одну из вершин по горизонтальной поверхности так, что эта вершина движется равномерно по границе двух полуповерхностей (см. рисунок, вид сверху). Коэффициент трения между треугольником и одной полуповерхностью – μ_1 , треугольником и второй полуповерхностью – μ_2 .

Какой горизонтальной силой, направленной вправо, можно тянуть за другую вершину?

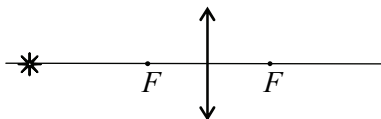
ленной вдоль границы полуповерхностей, нужно действовать для этого на треугольник?

г. Мирный, апрель 2009 г.

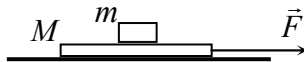
1. Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найти величину и направление ускорения лифта. Считать, что $g = 10$ м/с².

2. При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения T_1 до значения T_2 , при этом объем газа уменьшился на величину ΔV . Найти конечный объем газа.

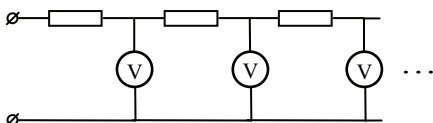
3. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 30$ см от линзы. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Источник перемещают на расстояние $a = 2$ см перпендикулярно главной оптической оси. На какое расстояние переместилось при этом изображение?



4. На гладкую горизонтальную поверхность аккуратно положили доску массой $M = 5$ кг, на нее – тело массой $m = 1$ кг, а затем подействовали на доску силой $F = 20$ Н, направленной горизонтально (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и доской $\mu = 0,5$. Будет ли тело скользить относительно доски? Найти силу трения, действующую на тело. Трение между доской и поверхностью отсутствует.



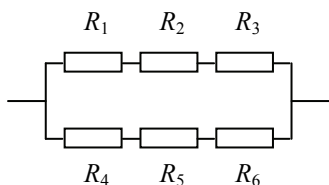
5. Электрическая цепь состоит из огромного количества звеньев, каждое из которых содержит резистор и вольтметр, сопротивление которого равно сопротивлению резистора. К цепи прикладывают напряжение U . Найти сумму показаний всех вольтметров.



г. Новгород, апрель 2009 г.

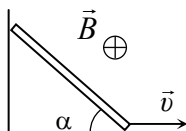
1. Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найти величину и направление ускорения лифта. Считать, что $g = 10$ м/с².

2. При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения T_1 до значения T_2 , при этом объем газа уменьшился на величину ΔV . Найти конечный объем газа.



3. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется наибольшая мощность? $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом. Найти эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100$ В.

4. Корабль движется на запад со скоростью v . Ветер дует с северо-запада под углом α к меридиану. Скорость ветра, измеренная на корабле, равна u . Найти скорость ветра относительно земли.



5. Равномерно заряженная положительным зарядом q тонкая палочка движется так, что ее нижний конец скользит по горизонтальной опоре с постоянной скоростью v , верхний – по вертикальной стенке (см. рисунок). Палочка находится

в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , направленном горизонтально и параллельно границе между стенкой и опорой. С какой силой поле действует на палочку в тот момент, когда угол между ней и опорой равен α ?

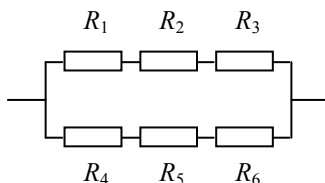
гг. Новоуральск, Северск, апрель 2009 г.

1. Две пятых части пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшуюся часть – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.

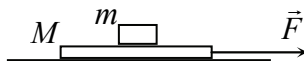
2. В начальном состоянии объем, давление и абсолютная температура газа, соответственно, равны p_0 , V_0 и T_0 . Сначала газ подвергают изобарическому расширению до объема V_1 , а затем изохо-

рическому нагреванию до давления p_1 . Найти температуру газа в конечном состоянии.

3. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется наибольшая мощность? $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом. Найти эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100$ В.



4. На гладкую горизонтальную поверхность аккуратно положили доску массой $M = 5$ кг, на нее – тело массой $m = 1$ кг, а затем подействовали на доску силой $F = 20$ Н, направленной горизонтально (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и доской $\mu = 0,5$. Будет ли тело скользить относительно доски? Найти силу трения, действующую на тело. Трение между доской и поверхностью отсутствует.

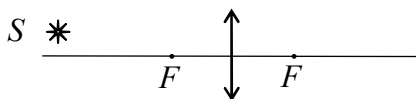


5. Тонкая металлическая пластинка площадью S залита слоем жидкого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ и плотностью ρ так, что толщина слоя диэлектрика много меньше линейных размеров пластинки. Пластинку заряжают положительным зарядом Q . Поднимется или опустится уровень жидкости над пластинкой, и если да, то на сколько?



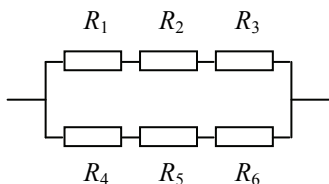
г. Обнинск, апрель 2009 г.

1. Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найти величину и направление ускорения лифта. Считать, что $g = 10$ м/с².



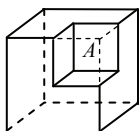
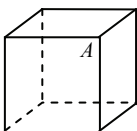
2. Построить изображение точечного источника S в тонкой собирающей линзе. Источник расположен на расстоянии $3F$ от плоскости линзы и на расстоянии x от главной оптической оси (см.

рисунок). Найти расстояние от изображения источника до главной оптической оси.



3. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется наибольшая мощность? $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = 5 \text{ Ом}$, $R_6 = 6 \text{ Ом}$. Найти эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100 \text{ В}$.

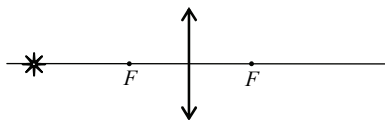
4. В вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится идеальный газ. Чтобы уменьшить объем газа в 2 раза, на поршень надо положить груз массой m . Какой еще груз надо положить на поршень, чтобы уменьшить объем газа еще в 2 раза? Температура поддерживается постоянной.



5. Однородно заряженный куб с ребром a создает в своей вершине A электрическое поле напряженностью E_0 . Из куба удаляют кусок в форме меньшего куба с ребром a_1 ($a_1 < a$), а к заряду оставшейся части куба добавляют заряд удаленного куска, распределяя его равномерно. Чему теперь равна напряженность электрического поля в точке A ?

г. Саров, Электрогорск, апрель 2009 г.

1. Груз массой $m = 1 \text{ кг}$ лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5 \text{ Н}$. Найти величину и направление ускорения лифта. $g = 10 \text{ м/с}^2$.

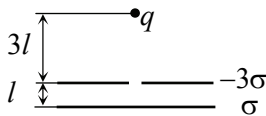


2. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 30 \text{ см}$ от линзы. Фокусное расстояние линзы $F = 10 \text{ см}$. Линзу сместили на расстояние $a = 2 \text{ см}$ перпендикулярно главной оптической оси. На какое расстояние переместилось при этом изображение?

3. В баллоне содержится ν молей одноатомного идеального газа при температуре T . При изохорическом нагревании газа средняя

скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найти количество теплоты, подведенное к газу.

4. Имеются две параллельные пластины, в одной из которых сделано маленькое отверстие. Пластины равномерно заряжены: одна положительным зарядом с поверхностной плотностью σ , вторая отрицательным зарядом с поверхностной плотностью -3σ , расстояние между пластинами l (см. рисунок).



На расстоянии $3l$ от пластин напротив отверстия удерживают точечное тело массой m , заряженное положительным зарядом q (см. рисунок). Тело отпускают. Достигнет ли тело пластины с зарядом σ и если да, то какую скорость оно будет иметь около этой пластины? Краевыми эффектами пренебречь.

5. На поверхности стола лежит пачка (500 листов) бумаги. Коэффициент трения между листами бумаги – μ , между бумагой и поверхностью стола – μ_1 . 100-й лист снизу является бóльшим по размеру, чем остальные. За этот лист тянут, прикладывая к нему некоторую горизонтальную силу F (см. рисунок).



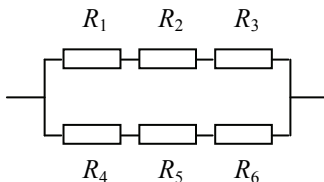
При каком соотношении коэффициентов трения μ и μ_1 пачка бумаги может двигаться как целое, не рассыпаясь?

г. Смоленск, апрель 2009 г.

1. Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найти величину и направление ускорения лифта. Считать, что $g = 10$ м/с².

2. При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения T_1 до значения T_2 , при этом объем газа уменьшился на величину ΔV . Найти конечный объем газа.

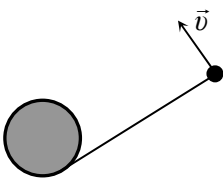
3. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется наибольшая мощность? $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом,



$R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом. Найти эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100$ В.



4. На гладкую горизонтальную поверхность аккуратно положили доску массой $M = 5$ кг, на нее – тело массой $m = 1$ кг, а затем действовали на доску силой $F = 20$ Н, направленной горизонтально (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и доской $\mu = 0,5$. Будет ли тело скользить относительно доски? Найти силу трения, действующую на тело. Трение между доской и поверхностью отсутствует.



5. На поверхности стола расположен вертикальный цилиндр радиусом R , на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого равна l_0 , привязано тело. Телу сообщают скорость v , направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает наматываться на цилиндр (см. рисунок, вид сверху). Найти время, за которое нить полностью наматывается на цилиндр. Трение отсутствует.

г. Снежинск, март 2009 г.

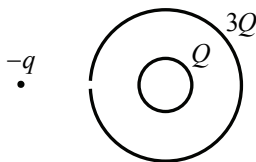
1. Жук ползет с постоянной скоростью вдоль квадрата, сделанного из проволоки. Известно, что на прохождение вдоль всего периметра квадрата жук затрачивает время t . Какое время жук затратит на прохождение диагонали квадрата, если будет двигаться с вдвое большей скоростью?

2. Точечный предмет расположили перед фокусом тонкой собирающей линзы на расстоянии $l = 10$ см от него на главной оптической оси. Фокусное расстояние линзы $F = 20$ см. На каком расстоянии от второго фокуса линзы находится изображение предмета?

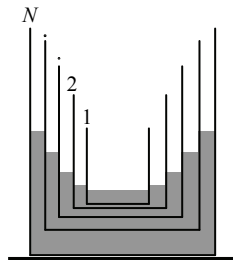
3. В баллоне содержится ν молей одноатомного идеального газа при температуре T . При изохорическом нагревании газа средняя скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найти количество теплоты, подведенное к газу.

4. Две закрепленные концентрические сферы радиусами R и $2R$ равномерно заряжены положительными зарядами Q и $3Q$ (см. ри-

сунок). В большой сфере сделано маленькое отверстие. На расстоянии $4R$ от центра сфер напротив отверстия удерживают отрицательный точечный заряд $-q$, имеющий массу m . Заряд $-q$ отпускают. Какую скорость он будет иметь в тот момент, когда окажется на расстоянии $3R/2$ от центра сфер?



5. N цилиндрических стаканов с массами $m, 2m, \dots, Nm$ и площадями сечений $S, 2S, \dots, NS$ вставлены друг в друга (см. рисунок). В стаканы наливают большое количество жидкости так, что каждый стакан плавает в большем стакане, не касаясь его дна и стенок. Самый большой стакан стоит на столе. Найти высоту уровня жидкости в самом большом стакане относительно стола. Полная масса жидкости – M , плотность жидкости – ρ . Стенки стаканов – очень тонкие.

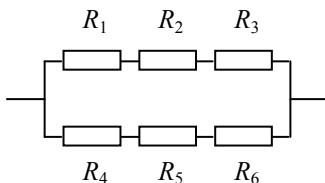


г. Томск, апрель 2009 г.

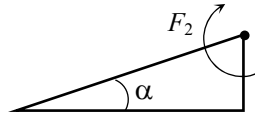
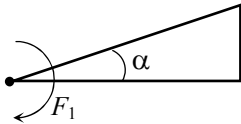
1. Точечный источник расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Расстояние от источника до линзы в $n = 2$ раза меньше фокусного расстояния линзы. Найти расстояние между источником и его изображением, если фокусное расстояние линзы равно $F = 10$ см.

2. При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения T_1 до значения T_2 , при этом объем газа уменьшился на величину ΔV . Найти конечный объем газа.

3. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется наибольшая мощность? $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом. Найти эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100$ В.



4. На гибкую замкнутую непроводящую нить длиной l нанизаны три бусинки с зарядами одного знака q_1 , q_2 и q_3 , которые могут без трения скользить по нити. Бусинки отпускают, и они приходят в состояние равновесия. Найти силу натяжения нити. Ответ обосновать.



5. Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник с меньшим острым углом α расположен на шероховатой горизонтальной поверхности. Чтобы повернуть треугольник относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину угла α , к треугольнику необходимо приложить минимальную горизонтальную силу F_1 , а чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину другого острого угла, – минимальную горизонтальную силу F_2 (см. рисунок, вид сверху). Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к треугольнику, чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину прямого угла? Считать, что треугольник прижимается к поверхности равномерно по всей площади.

РЕШЕНИЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ТУРЫ

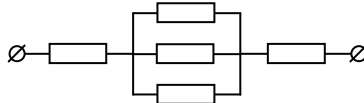
Олимпиада памяти И.В. Савельева
г. Москва, 7 декабря 2008 г.

1. Сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстоянии r друг от друга определяется законом Кулона

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2}, \quad (1)$$

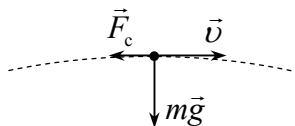
где $k = 1/4\pi\epsilon_0$. Из формулы (1) следует, что если один из зарядов увеличить в n раз, а расстояние между зарядами уменьшить в k раз, то сила взаимодействия (1) увеличится в nk^2 раз.

2. Очевидно, что с помощью другого расположения проводов данную цепь можно свести к цепи, изображенной на рисунке. Поэтому эквивалентное сопротивление цепи равно



$$R = r + \frac{r}{3} + r = \frac{7r}{3}.$$

3. В верхней точке траектории на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила сопротивления воздуха \vec{F}_c , направленная горизонтально (см. рисунок). Поэтому из второго закона Ньютона для данного тела $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c$ имеем



$$ma = \sqrt{m^2 g^2 + F_c^2},$$

где $a = 4g/3$ – ускорение тела в этой точке. Отсюда находим

$$F_c = \sqrt{m^2 g^2 - m^2 a^2} = \frac{\sqrt{7}}{3} mg.$$

4. Работа газа в изобарическом процессе равна $A = p\Delta V = \nu R\Delta T$, изменение внутренней энергии – $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$,

где ν – количество вещества газа; R – универсальная газовая постоянная; ΔT – приращение температуры. Поэтому из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

для изобарического процесса следует, что на изменение внутренней энергии газа тратится в этом процессе три пятых сообщенного газу количества теплоты Q :

$$\Delta U = \frac{3}{5}Q. \quad (1)$$

В адиабатическом процессе $Q = 0$, поэтому

$$A = -\Delta U. \quad (2)$$

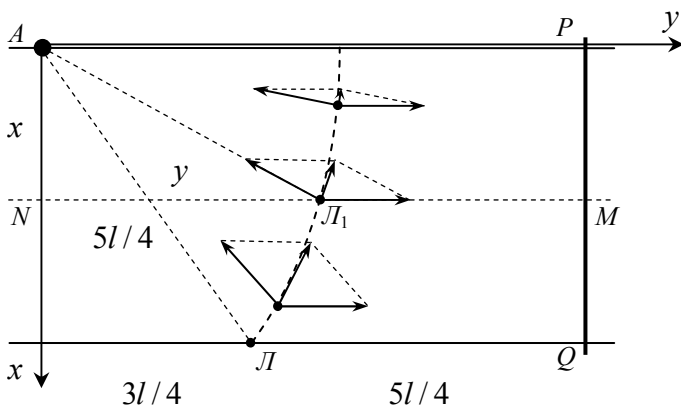
Поскольку по условию изменения внутренней энергии в рассматриваемых адиабатическом и изобарическом процессах отличаются только знаком, из (1), (2) находим

$$Q = \frac{5}{3}A.$$

5. То, что лодочник в каждый момент времени ставит нос лодки в направлении города A , означает: вектор скорости лодки относительно воды \vec{v} в каждый момент времени направлен в город A . А вот двигаться в каждый момент времени лодка будет в другом направлении из-за сноса течением. Действительно, поскольку скорость лодки относительно земли \vec{v}_1 (а именно, она определяет траекторию) определяется законом сложения скоростей

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{u}, \quad (1)$$

где \vec{u} – скорость течения, то из-за разных направлений вектора \vec{v} и величина, и направление вектора \vec{v}_1 будут различными. На рисунке показана траектория лодки и параллелограммы сложения скоростей, отвечающие закону (1) в разных точках траектории. Из-за изменения направления скорости \vec{v}_1 лодка движется по кривой траектории.



По условию величина скорости лодки в стоячей воде и скорости течения одинаковы в каждый момент времени. Поэтому параллелограмм сложения скоростей является ромбом, и, следовательно, в каждый момент времени проекция вектора скорости лодки относительно земли на направление LA и на направление течения одинаковы. Поэтому за каждый малый интервал времени лодка приближается к точке A и спускается вниз по течению на одинаковое расстояние. А это значит, что если ввести вспомогательную прямую, расположенную от начального положения лодки ниже по течению на таком же расстоянии, как и точка A (прямая PQ на рисунке), то в каждый момент времени расстояния от лодки до точки A и до прямой PQ будут одинаковы. Поскольку в начальный момент времени лодка расположена на расстоянии $\sqrt{l^2 + (3l/4)^2} = 5l/4$ от точки A , то и расстояние от начального положения лодки до прямой PQ равно $5l/4$.

Получим теперь уравнение траектории. Введем систему координат так, как это показано на рисунке, рассмотрим некоторое

промежуточное положение лодки L_1 и найдем связь ее координат x и y . С одной стороны, из приведенных рассуждений следует, что $L_1A = L_1M$. С другой – $L_1A = \sqrt{x^2 + y^2}$, $L_1M = 2l - y$. Поэтому

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2l - y. \quad (2)$$

Возводя формулу (2) в квадрат, получаем уравнение траектории

$$y = -\frac{x^2}{4l} + l. \quad (3)$$

Эта траектория – парабола, сдвинутая вдоль оси y на расстояние l (пунктирная кривая на рисунке), с ветвями, направленными против оси y . Отсюда находятся все характерные точки этой траектории. В частности, когда лодка находится на середине реки, ее координата x равна $l/2$. Координату y лодки в этот момент находим из формулы (3)

$$y = \frac{15l}{16}, \quad (4)$$

а затем и расстояние от лодки до точки A

$$L_1A = \sqrt{(l/2)^2 + (15l/16)^2} = \frac{17}{16}l.$$

Олимпиада памяти И.В. Курчатова г. Москва, 8 февраля 2009 г.

1. По закону Ома находим силу тока I в рассматриваемой цепи

$$I = \frac{U}{(11r/3)} = \frac{3U}{11r}, \quad (1)$$

где $11r/3$ – эквивалентное сопротивление цепи. Ток (1) делится на участке параллельного соединения в отношении $I_r : I_{2r} = 2 : 1$, где I_r и I_{2r} – токи через сопротивление r и $2r$ соответственно. Поэтому ток через сопротивление r равен

$$I_r = \frac{2}{3}I = \frac{2U}{11r}. \quad (2)$$

Из формулы (2) и закона Джоуля – Ленца находим мощность, которая выделяется на сопротивлении r :

$$P_r = \frac{4U^2}{121r}.$$

2. Условия равновесия грузов массой m и массой $2m$ на пружине в поле силы тяжести дают

$$\begin{aligned} mg &= k(l_1 - l_0); \\ 2mg &= k(l_2 - l_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где k – коэффициент жесткости пружины; l_0 – ее длина в недеформированном состоянии. Деля первое уравнение системы (1) на второе и решая полученное уравнение, находим

$$l_0 = 2l_1 - l_2.$$

3. Поскольку вертикальная составляющая силы F ($F \sin \alpha = 2,5$ Н) меньше силы тяжести ($mg = 10$ Н), тело не оторвется от опоры.

Величина горизонтальной составляющей силы F («сдвигающая» сила) равна $F \cos \alpha = 4,3$ Н, максимальная сила трения, которая может действовать на данное тело со стороны горизонтальной поверхности, – $F_{mp}^{\max} = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha) = 3,75$ Н. Поскольку $F \cos \alpha > F_{mp}^{\max}$, тело будет скользить по поверхности, а действующая на него сила трения будет равна максимальной силе трения

$$F_{mp} = F_{mp}^{\max} = \mu(mg - F \sin \alpha) = 3,75 \text{ Н}.$$

Если бы для сдвигающей силы и максимальной силы трения выполнялось обратное неравенство – $F \cos \alpha < F_{mp}^{\max}$, то тело покоилось бы, а сила трения равнялась сдвигающей силе $F \cos \alpha$.

4. Пусть масса поршня – M , атмосферное давление – p_0 . Тогда условие равновесия поршня без груза имеет вид

$$p_0 S + Mg = pS, \quad (1)$$

где S – площадь поршня; p – давление газа в сосуде. Применяя к газу в сосуде закон Клапейрона – Менделеева, получим с учетом (1)

$$p_0 + \frac{Mg}{S} = \frac{\nu RT}{V}, \quad (2)$$

где ν и T – количество вещества и температура газа в сосуде; V – его объем.

Когда на поршень положили груз массой m , давление газа в сосуде увеличилось на величину mg/S , поэтому с учетом того, что объем сосуда уменьшился в 2 раза, закон Клапейрона – Менделеева для газа в сосуде дает:

$$p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{mg}{S} = \frac{2\nu RT}{V}. \quad (3)$$

Вычитая уравнение (2) из уравнения (3), найдем

$$\frac{\nu RT}{V} = \frac{mg}{S}. \quad (4)$$

Пусть для того чтобы уменьшить объем сосуда еще в 2 раза, на поршень необходимо положить груз массой m_1 . Тогда закон Клапейрона – Менделеева для газа в этом случае имеет вид

$$p_0 + \frac{Mg}{S} + \frac{mg}{S} + \frac{m_1 g}{S} = \frac{4\nu RT}{V}. \quad (5)$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (5) и используя формулу (4), получим

$$m_1 = 2m.$$

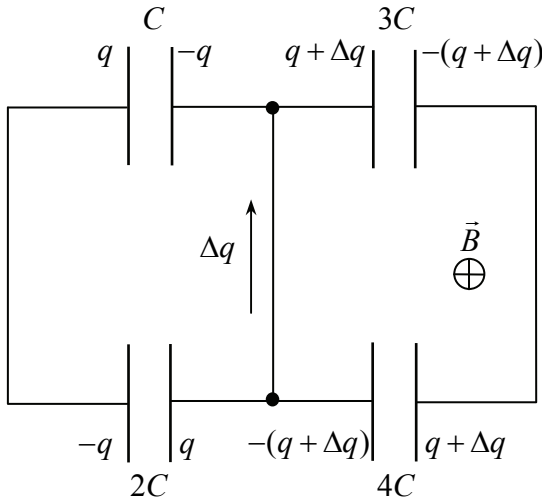
5. При изменении магнитного поля будет изменяться магнитный поток через контур, и это приведет к возникновению в контуре ЭДС. В результате конденсаторы приобретут некоторые заряды. Для их нахождения воспользуемся законом электромагнитной индукции и законом сохранения электрического заряда. Пусть левая обкладка конденсатора C приобретает заряд q , правая – заряд $-q$ (заряды обкладок конденсаторов будут обязательно равны по величине, поскольку это положение отвечает минимуму энергии конденсатора). Тогда по закону сохранения электрического заряда левая обкладка конденсатора $2C$ приобретет заряд $-q$, правая $-q$ (см. рисунок). Если при этом по перемычке в направлении, указанном на рисунке, протек заряд Δq , то обкладки конденсаторов $3C$ и $4C$

приобретут заряды $q + \Delta q$ и $-(q + \Delta q)$ так, как показано на рисунке. По закону электромагнитной индукции сумма напряжений на конденсаторах в каждом контуре равна ЭДС индукции. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{q}{C} + \frac{q}{2C} &= \alpha t B a^2; \\ \frac{q + \Delta q}{3C} + \frac{q + \Delta q}{4C} &= \alpha t B a^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где использовано то обстоятельство, что величина ЭДС в контуре есть производная магнитного потока по времени

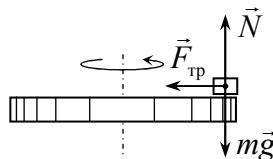
$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\alpha t B S = \alpha t B a^2. \quad (2)$$



Выражая заряд q из первого уравнения системы (1) и подставляя его во второе, получим уравнение относительно неизвестного заряда Δq . Его решение дает

$$\Delta q = \frac{22\alpha t B C a^2}{21}. \quad (3)$$

A4. Тело, находящееся на поверхности вращающегося диска и вращающееся вместе с ним, участвует в следующих взаимодействиях. Во-первых, тело притягивается к земле (сила тяжести), и на него действует поверхность диска (сила нормальной реакции и сила трения), причем сила трения в каждый момент времени направлена к оси вращения (см. рисунок). Действительно, в отсутствие силы трения тело либо будет оставаться на месте, а диск под ним будет вращаться, либо (если тело имеет скорость) слетит с поверхности диска. Именно сила трения «заставляет» тело вращаться вместе с диском. Поэтому сила трения служит в данной задаче центростремительной силой. Остальные перечисления, данные в условии: «на тело действуют силы тяжести, трения, реакции опоры, центростремительная (или центробежная)», являются неправильными, поскольку в них смешиваются характеристики сил разных типов – первые три касаются природы взаимодействий, вторые – результата действия. Поэтому правильный ответ на вопрос задачи – 1. Кроме того, отметим, что центробежная сила возникает только в неинерциальных системах отсчета и в школьном курсе физики не рассматривается (поэтому лучше этим понятием вообще не пользоваться).

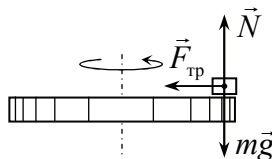


A5. Чтобы найти амплитуду колебаний, необходимо представить зависимость координаты тела от времени в виде одной тригонометрической функции. Для данной в условии функции $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ это можно сделать с помощью введения дополнительного угла. Умножая и деля эту функцию на $\sqrt{A^2 + B^2}$ и используя формулу сложения тригонометрических функций, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где φ – такой угол, что $\operatorname{tg} \varphi = A / B$. Из этой формулы следует, что амплитуда колебаний тела – $\sqrt{A^2 + B^2}$ (ответ 4).

A4. Тело, находящееся на поверхности вращающегося диска и вращающееся вместе с ним, участвует в следующих взаимодействиях. Во-первых, тело притягивается к земле (сила тяжести), и на него действует поверхность диска (сила нормальной реакции и сила трения), причем сила трения в каждый момент времени направлена к оси вращения (см. рисунок). Действительно, в отсутствие силы трения тело либо будет оставаться на месте, а диск под ним будет вращаться, либо (если тело имеет скорость) слетит с поверхности диска. Именно сила трения «заставляет» тело вращаться вместе с диском. Поэтому сила трения служит в данной задаче центростремительной силой. Остальные перечисления, данные в условии: «на тело действуют силы тяжести, трения, реакции опоры, центростремительная (или центробежная)», являются неправильными, поскольку в них смешиваются характеристики сил разных типов – первые три касаются природы взаимодействий, вторые – результат действия. Поэтому правильный ответ на вопрос задачи – 1. Кроме того, отметим, что центробежная сила возникает только в неинерциальных системах отсчета и в школьном курсе физики не рассматривается (поэтому лучше этим понятием вообще не пользоваться).



A5. Чтобы найти амплитуду колебаний, необходимо представить зависимость координаты тела от времени в виде одной тригонометрической функции. Для данной в условии функции $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ это можно сделать с помощью введения дополнительного угла. Умножая и деля эту функцию на $\sqrt{A^2 + B^2}$ и используя формулу сложения тригонометрических функций, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где φ – такой угол, что $\operatorname{tg} \varphi = A / B$. Из этой формулы следует, что амплитуда колебаний тела – $\sqrt{A^2 + B^2}$ (ответ 4).

А6. Сначала обратим внимание читателя, что предложенные в задаче значения температур и варианты ответов «подталкивают» к выбору ответа $\sqrt{5}$, поскольку конечная температура в 5 раз больше начальной. Тем не менее, это неправильно, поскольку температуры заданы в градусах Цельсия, а в формулу, связывающую температуру и среднюю кинетическую энергию молекул, входит абсолютная температура. Поэтому

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{273+125}{273+25}} = \sqrt{\frac{398}{298}} \approx \sqrt{\frac{400}{300}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(ответ 4).

А7. Из определения удельной теплоемкости заключаем, что $\Delta T = \frac{Q}{cm}$ (ответ – 3).

А8. Пусть для определенности заряды шариков q_1 и q_2 положительны. Так как шарики одинаковы, заряды после их соединения распределятся между ними равномерно, и для сравнения сил нужно сравнить друг с другом величины

$$q_1 q_2 \quad \text{и} \quad \frac{(q_1 + q_2)^2}{4}, \quad (1)$$

которые представляют собой произведения зарядов шариков до и после их соединения. После извлечения квадратного корня сравнение (1) сводится к сравнению среднего геометрического $\sqrt{q_1 q_2}$ и среднего арифметического $(q_1 + q_2)/2$ двух чисел. А поскольку среднее арифметическое любых двух чисел больше их среднего геометрического, то сила взаимодействия шариков возрастет независимо от величин их зарядов (ответ 1).

А9. Как известно, сила взаимодействия равномерно заряженной сферы и точечного заряда, находящегося внутри нее, равна нулю (ответ 3).

А10. Силовые линии электрического поля строятся так, что их густота пропорциональна величине поля: чем гуще силовые линии, тем больше величина напряженности. Поэтому $E_1 < E_2$ (ответ 2).

А11. Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в рамке определяется скоростью изменения магнитного потока

через нее. А поскольку по условию индукция магнитного поля в области рамки изменяется равномерно, скорость ее изменения постоянна, ЭДС индукции не изменяется в процессе проведения опыта (ответ 3).

A12. Как показывает опыт, радиоактивный распад происходит следующим образом: количество атомов распадающегося вещества уменьшается вдвое за некоторый интервал времени, характерный для данного вещества, причем независимо от того, какое количество атомов вещества имеется в настоящий момент. Этот интервал времени и называется периодом полураспада. Поэтому за время, равное одному периоду полураспада T , количество атомов распадающегося вещества уменьшится вдвое и станет равным $N/2$. Еще за один период полураспада вдвое уменьшится и это количество атомов, поэтому останется $N/4$ атомов вещества. А за еще один период полураспада (т.е. за время $3T$ после начала наблюдения) вдвое уменьшится и это количество. Поэтому через время $3T$ после начала наблюдения останется $N/8$ атомов вещества (ответ 3).

B1. Цепочка начинает скользить, когда сила тяжести, действующая на ее висющий конец, будет равна силе трения, действующей на часть цепочки, лежащей на столе:

$$\frac{1}{6}mg = \frac{5}{6}\mu mg,$$

где m – масса цепочки; μ – коэффициент трения между цепочкой и столом. Отсюда находим $\mu = 0,2$.

B2. Пусть расстояние от предмета до линзы равно d . Тогда по формуле линзы имеем

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

где f – расстояние между изображением и линзой; F – фокусное расстояние линзы. Отсюда находим

$$f = \frac{dF}{d + F}. \quad (1)$$

Поскольку линза – рассеивающая, предмет и изображение расположены с одной стороны от линзы, и, следовательно, расстояние от предмета до линзы равно $d - f$. Поэтому по условию имеем:

$$\frac{F}{2} = d - \frac{dF}{d + F}. \quad (2)$$

Из (2) получаем, что $d = F$, а из (1), что $f = F/2$. Поскольку отношение размеров изображения к размерам предмета равно отношению их расстояний до линзы, заключаем, что искомое отношение равно 0,5.

С1. Первый закон термодинамики для изохорического нагрева ν молей одноатомного идеального газа дает

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T,$$

где ΔT – изменение температуры газа; R – универсальная газовая постоянная. Температура связана со средней кинетической энергией движения молекул. Поэтому

$$\frac{3}{2} k \Delta T = \Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right)_{\text{ср}} = \left(\frac{mv^2}{2} \right)_{\text{ср}} (n^2 - 1) = \frac{3}{2} k T (n^2 - 1),$$

где T – начальная температура газа. Отсюда получаем

$$Q = \frac{3}{2} \nu R T (n^2 - 1).$$

С2. Когда колеса тележки не закреплены, сила трения отсутствует (по условию трением качения пренебрегаем), и ускорение тележки определяется формулой

$$a = \frac{mg}{m + M}, \quad (1)$$

где m – масса груза; M – масса тележки. Если колеса одной оси закреплены, на них действует сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, и ускорение тележки (которое по условию равно a/n) будет равно

$$\frac{a}{n} = \frac{mg}{m + M} - \frac{F_{\text{тр}}}{m + M}. \quad (2)$$

Если закрепить колеса еще одной оси, то сила трения, действующая на тележку, возрастет вдвое. Поэтому ускорение тележки в этом случае (обозначим его a/kn ; величину k нам нужно найти) есть

$$\frac{a}{kn} = \frac{mg}{m+M} - \frac{2F_{\text{тр}}}{m+M}. \quad (3)$$

Система трех уравнений (1) – (3) содержит пять неизвестных a , m , M , $F_{\text{тр}}$ и k и потому не может быть разрешена относительно всех неизвестных. Тем не менее, величина k может быть найдена. Действительно, подставляя во второе уравнение вместо комбинации $mg / (m + M)$ величину a (1) и приводя подобные члены, получим

$$\frac{a(n-1)}{n} = \frac{F_{\text{тр}}}{m+M}. \quad (4)$$

Теперь, подставляя в уравнение (3) вместо комбинации $mg / (m + M)$ величину a (1), а вместо $F_{\text{тр}} / (m + M)$ - выражение (4), получим

$$\frac{a}{kn} = a - \frac{2a(n-1)}{n}. \quad (5)$$

Сокращая ускорение a , находим величину k , показывающую, во сколько раз уменьшилось ускорение в третьем случае по сравнению со вторым:

$$k = \frac{1}{2-n}.$$

Отрицательность k при $n > 2$ означает, что в этом случае при закреплении двух осей тележка перестает двигаться.

Пробный экзамен в форме ЕГЭ, г. Москва, 22 марта 2009 г.

A1. Конец минутной стрелки проходит расстояние $2\pi l$ (l – ее длина) за 1 ч. Конец часовой – расстояние $2\pi(l/2) = \pi l$ за 12 ч. Поэтому линейная скорость конца минутной стрелки в 24 раза больше линейной скорости конца часовой (ответ 2).

A2. Поскольку силы, действующие на канат со стороны команд, равны друг другу по величине, ускорение каната равно нулю. Очевидно, что и любая часть каната, и, в частности, его часть от первой команды до какой-то средней точки также будут в равновесии. А поскольку на эту часть действуют сила F со стороны команды и

сила со стороны другой части каната T (сила натяжения), то условие равновесия этой части каната дает $0 = F - T$, откуда заключаем, что $T = F = 5000$ Н (ответ 1).

А3. Задача отличается только числами от задачи А3 из задания пробного экзамена 1 марта 2009 г. Тем не менее, решение будет совсем другим. В этой задаче «сдвигающая» сила $F = 2$ Н больше максимальной силы трения $\mu mg = 1$ Н, и потому под действием данной «сдвигающей» силы тело будет двигаться. Поэтому сила трения будет равна своему максимальному значению $F_{\text{тр}} = \mu mg = 1$ Н (ответ 3).

А4. Несмотря на то, что тело не касается дна и стенок сосуда, суммарная сила, действующая на левую чашку весов, увеличится. Действительно, при опускании тела в воду возникает сила Архимеда, действующая со стороны воды на тело, но при этом и тело действует на воду, причем эта сила направлена вертикально вниз и равна силе Архимеда. Чтобы весы остались в равновесии, на правую чашку весов надо положить такой груз, сила тяжести которого равна этой силе, т.е. груз массой $\Delta m = \rho V$, где ρ – плотность воды; V – объем тела. А поскольку плотность тела по условию вчетверо больше плотности воды, то $\Delta m = m / 4$ (ответ 1).

А5. Вертикальный пружинный маятник отличается от горизонтального наличием силы тяжести. Однако сила тяжести приводит только к сдвигу положения равновесия маятника. Возвращающая сила, которой здесь является разность сил упругости и тяжести, по-прежнему будет зависеть от смещения маятника от положения равновесия по закону $k\Delta x$, где k – жесткость пружины; Δx – смещение маятника. Поэтому период колебаний груза на вертикальной и горизонтальной пружинах одинаков (конечно, при условии, что и сам груз, и пружины одинаковы). Правильный ответ в задаче – 3.

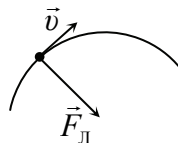
А6. Объемы и температуры газов одинаковы; поэтому для сравнения их давлений необходимо сравнить число молекул газов. В одном сосуде находится один моль азота, в другом 1 г водорода H_2 (т.е. половина моля) и $3 \cdot 10^{23}$ молекул гелия He (тоже половина моля). Поэтому и в одном, и в другом сосуде находятся одинаковые количества молекул, и, следовательно, давление газов в них одинаково (ответ 3).

А7. Поскольку работа теплового двигателя равна 100 Дж при КПД двигателя 25 %, то двигатель получает от нагревателя количество теплоты 400 Дж. Поэтому он отдает холодильнику 300 Дж теплоты в течение цикла (ответ 4).

А8. Задача очень похожа на задачу А8 из варианта пробного экзамена от 1 марта 2009 г., но ответ – другой. Непосредственной проверкой легко убедиться, что сила может как увеличиться, так и уменьшиться в зависимости от величин зарядов. Например, если заряды равны по величине, то после соединения шариков их заряды станут равны нулю, поэтому нулевой будет и сила их взаимодействия, которая, следовательно, уменьшится. Если один из первоначальных зарядов равен нулю, то после соприкосновения шариков заряд одного из них распределится между шариками поровну, и сила их взаимодействия увеличится. Таким образом, правильный ответ в этой задаче – 3.

А9. Рисунок в условии этой задачи – тот же самый, что и в задаче А10 из варианта пробного экзамена от 1 марта 2009 г., однако логика получения ответа – совсем другая. Чтобы сравнить потенциалы в точках 1 и 2, перенесем из первой точки во вторую положительный пробный заряд и найдем работу поля. Так как $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, и если работа положительна, то $\varphi_1 > \varphi_2$, если отрицательна – наоборот. Очевидно, работа поля при перемещении положительного заряда из точки 1 в точку 2 положительна. Действительно, стрелки на силовых линиях направлены вправо, следовательно, и сила, действующая на положительный заряд, направлена вправо, туда же направлен и вектор перемещения заряда, поэтому косинус угла между силой и перемещением положителен на всех элементарных участках траектории, поэтому положительна работа. Таким образом, $\varphi_1 > \varphi_2$ (ответ 1), причем этот результат является следствием направления стрелок на силовых линиях, а не переменной густоты силовых линий.

А10. Индукция магнитного поля должна быть направлена так, чтобы сила Лоренца, действующая на электрон, была направлена к центру окружности, по которой он движется (см. рисунок). А поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости и индукции, то вектор индукции может быть направлен в этой ситуа-



ции только «за чертеж» или «на нас». Воспользуемся далее правилом буравчика: если вращать буравчик так, что его ручка вращается от скорости заряда \vec{v} к индукции магнитного поля \vec{B} , то направление его вкручивания указывает направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд. Для электрона ($q < 0$) направление силы противоположно. Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор индукции направлен «за чертеж» (ответ 4).

A11. При увеличении тока в замкнутом проводнике в два раза величина индукции магнитного поля возрастет в каждой точке пространства в два раза, не изменившись по направлению. Поэтому ровно в два раза изменится магнитный поток через любую малую площадку и, соответственно, и весь проводник. А вот отношение магнитного потока через проводник к току в этом проводнике, которое и представляет собой индуктивность проводника, при этом не изменится (ответ 3).

A12. Максимальную энергию фотоэлектронов E , которую они приобретают при освещении цезия фотонами с энергией 2,1 эВ, найдем по уравнению Эйнштейна для фотоэффекта: $E = 2,1 - 1,9 = 0,2$ эВ. Отсюда следует, что для увеличения энергии фотоэлектронов вдвое (до величины 0,4 эВ) нужно повысить энергию фотонов до 2,3 эВ, т.е. на 0,2 эВ (ответ 2).

B1. При действии на одно из тел внешней силой система тел начнет двигаться, нить натянется, т.е. в ней возникнет сила натяжения. Нить разорвется, если сила натяжения достигнет данного в условии предела T_0 . Найдем силу натяжения. Если внешняя сила действует на тело массой m_1 , и система тел имеет ускорение a , то это ускорение телу массой m_2 сообщается силой натяжения. Поэтому если сила действует на тело массой m_1 , то сила натяжения будет равна $T = m_2 a$, если на тело массой m_2 , $T' = m_1 a$. Отсюда следует, что сила натяжения будет наибольшей при действии внешней силы на более легкое тело, и нить оборвется при выполнении условия $T_0 = m_2 a$. Таким образом, нить обрывается при ускорении тел $a = T_0 / m_2 = 2 \text{ м/с}^2$.

В2. При изобарическом нагревании газа на величину ΔT он совершает работу $A = p\Delta V$. Используя закон Клапейрона – Менделеева, получим $A = \nu R\Delta T = 83$ Дж.

С1. Из законов равноускоренного движения имеем для точки остановки

$$\begin{aligned} v_0 &= a\tau; \\ S &= \frac{v_0^2}{2a}, \end{aligned} \quad (1)$$

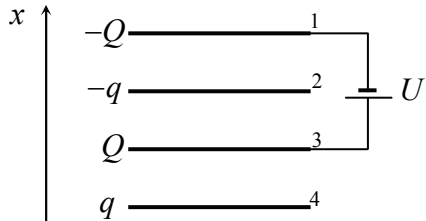
где v_0 – начальная скорость тела; a – его ускорение. Из системы уравнений (1) находим

$$v_0 = \frac{2S}{\tau}, \quad a = \frac{2S}{\tau^2}. \quad (2)$$

Используя (2), получаем для скорости тела через время τ/n после выхода из начальной точки

$$v = v_0 - \frac{a\tau}{n} = \frac{2S(n-1)}{n\tau}.$$

С2. Источник сообщит пластинам 1 и 3 некоторые электрические заряды так, что разность потенциалов этих пластин будет равна U . Из этого условия можно найти заряды пластин. Пусть пластина 1 приобрела заряд $-Q$,



пластина 3 – заряд Q (см. рисунок; и величина и знак заряда Q пока неизвестны). Согласно принципу суперпозиции электрическое поле будет создаваться зарядами всех пластин. Проекция вектора напряженности электрического поля на ось x (см. рисунок) в области между пластинами 2 и 3 и в области между пластинами 1 – 2 будут определяться соотношениями

$$E_{2-3,x} = \frac{Q}{S\epsilon_0} + \frac{q}{S\epsilon_0}, \quad E_{1-2,x} = \frac{Q}{S\epsilon_0}, \quad (1)$$

которые можно получить, используя формулу для напряженности электрического поля равномерно заряженной плоскости и принцип

суперпозиции (где S – площадь пластин; ε_0 – электрическая постоянная). Если перенести пробный заряд e от пластины 3 к пластине 1, электрическое поле совершит работу

$$A = eE_{1-2,x}d + eE_{2-3,x}d = \frac{2eQd}{S\varepsilon_0} + \frac{eqd}{S\varepsilon_0}. \quad (2)$$

С другой стороны, работа, которую совершает электрическое поле при перенесении пробного заряда, определяется разностью потенциалов начальной и конечной точек, поэтому

$$A = e(\varphi_3 - \varphi_1). \quad (3)$$

Находя из формул (2) и (3) разность потенциалов $\varphi_3 - \varphi_1$ и приравняв ее напряжению источника, получим

$$Q = -\frac{q}{2} + \frac{S\varepsilon_0 U}{2d} \quad (4)$$

(отметим, что в зависимости от параметров задачи заряд Q может быть как положительным, так и отрицательным).

Теперь можно найти разность потенциалов второй и четвертой пластин. Для этого перенесем пробный заряд e со второй на четвертую пластину. С одной стороны, поле совершит работу

$$A = e(\varphi_2 - \varphi_4), \quad (5)$$

с другой – эта же работа равна

$$A = -eE_{2-3,x}d - eE_{3-4,x}d = -\frac{eQd}{S\varepsilon_0} - \frac{2eqd}{S\varepsilon_0}, \quad (6)$$

где $E_{3-4,x} = q / S\varepsilon_0$ – проекция вектора напряженности электрического поля между пластинами 3 и 4 на ось x . Используя далее формулу (4) для заряда Q , получим

$$\varphi_2 - \varphi_4 = -\frac{U}{2} - \frac{3qd}{2S\varepsilon_0}.$$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТУРЫ

г. Москва, 5 апреля 2009 г.

1. По определению средней скорости имеем

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t}, \quad (1)$$

где S – расстояние между городами; t – время, затраченное на это движение. Время t можно найти следующим образом:

$$t = \frac{(2S/5)}{v_1} + \frac{(3S/5)}{v_2} = \frac{S(2v_2 + 3v_1)}{5v_1v_2}. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{5v_1v_2}{2v_2 + 3v_1} = 50 \text{ км/ч.}$$

2. Известно, что после центрального абсолютно упругого столкновения тела движутся вместе. Поэтому закон сохранения импульса для столкновения дает

$$mv = 3mv_1, \quad (1)$$

где v_1 – скорость тел после столкновения. Отсюда $v_1 = v/3$. Теперь по закону сохранения энергии можно найти количество выделившейся при ударе теплоты как разность начальной и конечной кинетической энергии системы тел:

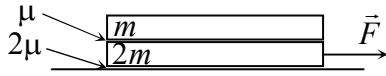
$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{3mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{3}.$$

3. Очевидно, система зарядов будет покоиться, поскольку в системе зарядов действуют только внутренние силы. Силу натяжения нити, связывающей заряды $2Q$ и $3Q$, можно найти из условия равновесия заряда $3Q$. Поскольку на него действует сила натяжения нити и силы отталкивания от зарядов Q и $2Q$, условие равновесия этого заряда дает

$$T = \frac{k3Q^2}{4a^2} + \frac{k6Q^2}{a^2} = \frac{27kQ^2}{4a^2},$$

где T – искомая сила натяжения нити, связывающей заряды $2Q$ и $3Q$, $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

4. Если нижняя доска скользит по поверхности, а между досками нет проскальзывания, то второй закон Ньютона для двух досок в проекциях на горизонтальную ось дает



$$3ma = F - 2\mu 3mg,$$

откуда находим ускорение досок

$$a = \frac{F}{3m} - 2\mu g. \quad (1)$$

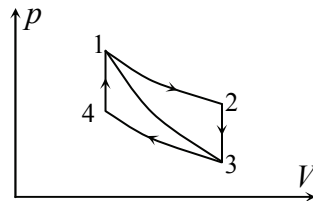
Верхней доске это ускорение сообщается силой трения, действующей между досками. Поэтому из формулы (1) находим силу трения между досками при условии, что между ними нет проскальзывания

$$F_{\text{тр}} = ma = \frac{F}{3} - 2\mu mg. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что при увеличении внешней силы F сила трения, действующая между телами, возрастает. Проскальзывание между досками возникнет, если сила трения (2) достигнет максимально возможного значения μmg . Отсюда находим минимальную внешнюю силу F , при которой возникнет проскальзывание между досками:

$$F = 9\mu mg.$$

5. В циклическом процессе 1 – 2 – 3 – 4 – 1 газ получал определенное количество теплоты от нагревателя на участках 1 – 2 (поскольку газ совершил положительную работу без изменения внутренней энергии) и 4 – 1 (его внутренняя энергия увеличилась без совершения работы). В процессах 2 – 3 и 3 – 4, которые идут в обратных направлениях, газ отдавал теплоту холодильнику. Обозначим количества теплоты, полученные от нагревателя в процессах 1 – 2 и 4 – 1, как Q_{1-2} и Q_{4-1} , количества теплоты, отданные



холодильнику в процессах 2 – 3 и 3 – 4, как Q_{2-3} и Q_{3-4} (все эти количества теплоты положительны). Тогда искомым коэффициент полезного действия (КПД) процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 1 есть

$$\eta = \frac{Q_{4-1} + Q_{1-2} - Q_{2-3} - Q_{3-4}}{Q_{4-1} + Q_{1-2}}. \quad (1)$$

Выразим количества теплоты, входящие в формулу (1), через КПД η_1 процесса 1 – 2 – 3 – 1 и отношение температур на верхней 1 – 2 и нижней 3 – 4 изотермах.

Для этого заметим, что поскольку процесс 3 – 1 – адиабатический, КПД цикла 1 – 2 – 3 – 1 η_1 равен

$$\eta_1 = \frac{Q_{1-2} - Q_{2-3}}{Q_{1-2}} = 1 - \frac{Q_{2-3}}{Q_{1-2}}, \quad (2)$$

откуда находим

$$\frac{Q_{2-3}}{Q_{1-2}} = 1 - \eta_1. \quad (3)$$

Далее, поскольку процессы 2 – 3 и 4 – 1 – изохорические, газ не совершает в них работу, поэтому количества теплоты, полученное от нагревателя в процессе 2 – 3 и отданное холодильнику в процессе 4 – 1, определяются изменением температуры газа и, следовательно, одинаковы

$$Q_{4-1} = Q_{2-3}. \quad (4)$$

Изменение внутренней энергии газа в процессах 1 – 2 и 3 – 4 равно нулю, поэтому количество теплоты, полученное газом в этих процессах, равно работе газа. С другой стороны, работа газа есть площадь под графиком процесса на диаграмме $p-V$, которая в этих процессах отличается вдвое, так как давление газа при любом значении его объема в процессе 1 – 2 в два раза больше давления газа при этом же значении объема в процессе 3 – 4. Следовательно,

$$Q_{3-4} = \frac{Q_{1-2}}{2}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4), (5) в (1), получаем

$$\eta = \frac{Q_{1-2}}{2(Q_{2-3} + Q_{1-2})} = \frac{1}{2\left(\frac{Q_{2-3}}{Q_{1-2}} + 1\right)}. \quad (6)$$

Используя теперь отношение количеств теплоты в процессах 2 – 3 и 1 – 2 из формулы (3), получим окончательно из (6)

$$\eta = \frac{1}{2(2 - \eta_1)}.$$

г. Москва, 9 апреля 2009 г.

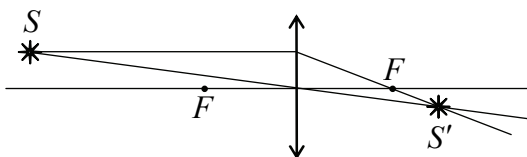
1. Из закона сохранения энергии для системы тело-пружина получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v/2)^2}{2} + \frac{k\Delta l^2}{2}, \quad (1)$$

где Δl – искомая деформация пружины к тому моменту, когда скорость тела будет равна $v/2$. Из формулы (1) находим

$$\Delta l = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} v.$$

2. Для построения изображения источника S' нужно построить ход двух лучей, вышедших из источника; точка пересечения этих лучей и будет изображением источника. Построение хода луча, параллельного главной оптической оси линзы, и луча, проходящего через ее оптический центр, выполнено на рисунке. Изображение источника находится в точке S' .



Чтобы найти расстояние от изображения до главной оптической оси, заметим, что отношение расстояний от источника и изображения до главной оптической оси равно отношению расстояний от

источника и изображения до плоскости линзы. Последнее отношение найдем по формуле линзы

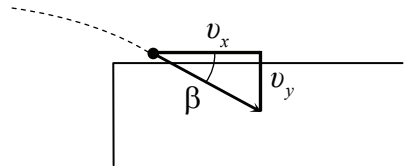
$$\frac{1}{3F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

где буквой f обозначено расстояние от изображения до линзы. Из формулы (1) получаем $f = \frac{3F}{2}$. Поэтому

$$\frac{x}{y} = \frac{3F}{(3F/2)} = 2,$$

где y – расстояние от изображения до главной оптической оси. Отсюда $y = \frac{x}{2}$.

3. Угол подлета тела к ступеньке – угол между направлением вектора его скорости и поверхностью ступеньки (см. рисунок).



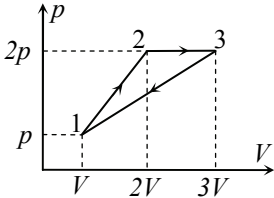
Этот угол можно найти через проекции вектора скорости. При движении тела под углом к горизонту проекция его скорости на горизонтальную ось (x) не изменяется и равна $v_x(t) = v_0 \cos \alpha$. Величину скорости на поверхности ступеньки v_1 можно найти по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

(конечно, высота ступеньки должна быть меньше максимальной высоты подъема $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, иначе тело не сможет попасть на ее по-

верхность; при выполнении этого условия подкоренное выражение здесь положительно). Отсюда находим

$$\beta = \arccos \frac{v_x}{v} = \arccos \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}} \right).$$



4. КПД теплового двигателя есть отношение работы, совершенной двигателем за цикл к количеству теплоты, полученному двигателем от нагревателя в течение цикла. Найдём эти величины.

В течение цикла газ получает определенное количество теплоты от нагревателя в процессах 1 – 2 и 2 – 3, отдает – в процессе 3 – 1 (см. рисунок). Количество теплоты, полученное от нагревателя Q_{1-3} , найдём, применяя к процессу 1 – 3 первый закон термодинамики. Имеем

$$Q_{1-3} = \Delta U_{1-3} + A_{1-3}, \quad (1)$$

где ΔU_{1-3} – изменение внутренней энергии газа в этом процессе; A_{1-3} – работа газа. Изменение внутренней энергии выражаем через изменение температуры, а затем с помощью закона Клапейрона – Менделеева связываем с изменениями давления и объема

$$\Delta U_{1-3} = \frac{3}{2}(vRT_3 - vRT_1) = \frac{15}{2} pV. \quad (2)$$

Работа газа в процессе 1 – 3 A_{1-3} равна площади под графиком процесса 1 – 3 на графике зависимости давления от объема. Из графика находим

$$A_{1-3} = \frac{7}{2} pV. \quad (3)$$

В результате из (1) – (3) находим

$$Q_{1-3} = 11pV. \quad (4)$$

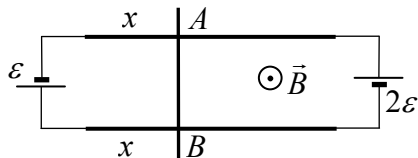
Работу газа в течение цикла A найдём как площадь цикла на графике $p(V)$

$$A = \frac{1}{2} pV. \quad (5)$$

Из формул (4), (5) получаем КПД рассматриваемого циклического процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_{1-3}} = \frac{1}{22}.$$

5. Перемычка будет находиться в равновесии, если ток через нее будет равен нулю (тогда на нее не действует магнитное поле). Это положение можно найти из законов Ома для замкнутой цепи и неоднородного участка цепи. По закону Ома для замкнутой цепи имеем для тока в рельсах (при условии, что ток через переключку равен нулю):

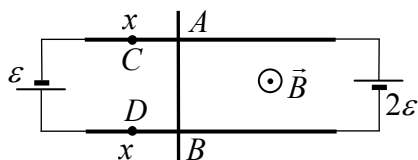


$$I = \frac{3\varepsilon}{2\rho L}. \quad (1)$$

Пусть длина рельсов от положения равновесия переключки до ЭДС ε равна x . Тогда по закону Ома для участка цепи AB , содержащего ЭДС ε , имеем (при условии, что напряжение между его концами равно нулю)

$$\varepsilon = 2I\rho x = \frac{3\varepsilon}{L}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{3}. \quad (2)$$

Если же рассмотреть участок цепи CD , содержащий ЭДС ε и более короткое, чем x части рельсов (см. рисунок), то из закона Ома для неоднородного участка цепи

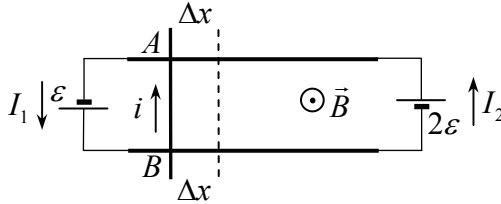


$$U_{DC} = \varepsilon - Ir, \quad (3)$$

где r – сопротивление рельсов между точками C и D (через ε), следует, что $U_{DC} > 0$ (так как $r < 2\rho x$). Поэтому, если переключка будет смещаться из положения равновесия влево, по ней начинает течь ток, направленный вверх (см. рисунок), и со стороны магнитного поля на переключку действует сила Ампера, направленная вправо. Аналогично доказывается, что если переключка сместится от положения равновесия вправо, сила Ампера будет направлена налево. Таким образом, при любых смещениях переключки в ней будет возникать электрический ток, и сила Ампера будет возвращать переключку в положение равновесия. Это приведет к тому, что переключка будет совершать колебания около положения равновесия.

Чтобы найти период колебаний, найдем возвращающую силу. Пусть смещение перемычки от положения равновесия равно Δx , а токи через источники в этом положении равны I_1 и I_2 (см. рисунок). Тогда, поскольку напряжение на концах перемычки в любой момент времени равно нулю, по закону Ома для участка цепи между A и B через источник ε имеем:

$$\varepsilon - I_1 2\rho((L/3) - \Delta x) = 0 \quad \text{или} \quad I_1 = \frac{\varepsilon}{2\rho((L/3) - \Delta x)}. \quad (4)$$



Аналогично для тока через второй источник получим

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{2\rho((2L/3) + \Delta x)}. \quad (5)$$

Из формул (4), (5) находим ток через перемычку

$$i = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon}{2\rho} \frac{3\Delta x}{((L/3) - \Delta x)((2L/3) + \Delta x)} \approx \frac{27\varepsilon}{4\rho L^2} \Delta x \quad (6)$$

(в последнем приближенном равенстве использована малость отклонения перемычки от положения равновесия по сравнению с длиной рельсов). Из формулы (6) следует, что сила Ампера, действующая на перемычку со стороны магнитного поля,

$$F = iBl = \frac{27\varepsilon Bl}{4\rho L^2} \Delta x \quad (7)$$

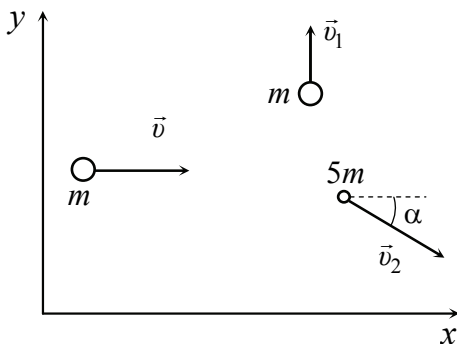
пропорциональна смещению перемычки, и, следовательно, перемычка будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4m\rho L^2}{27Bl\varepsilon}}.$$

1. Из закона сохранения импульса в проекциях на оси, одна из которых направлена вдоль начальной скорости первого тела, вторая – перпендикулярно (см. рисунок), имеем

$$mv = 5mv_2 \cos \alpha;$$

$$m \frac{v}{2} = 5mv_2 \sin \alpha. \quad (1)$$



Возводя уравнения в квадрат и складывая, получаем уравнение, в которое не входит угол α . Решение этого уравнения относительно неизвестной скорости второго тела дает

$$v_2 = \frac{\sqrt{5}}{10} v.$$

Если же разделить второе уравнение системы (1) на первое, получится уравнение относительно тангенса α , решение которого есть

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right).$$

2. См. решение задачи 2 из Олимпиады памяти И.В. Савельева.

3. См. решение задачи 2 из заключительного тура от 9 апреля 2009 г., г. Москва.

4. Исследуем условия равновесия системы поршней, связанных стержнем. Для этой системы внешними силами являются: силы, действующие на поршни со стороны газа между ними $\vec{F}_{\Gamma,1}$ и $\vec{F}_{\Gamma,2}$, и со стороны внешнего атмосферного воздуха $\vec{F}_{a,1}$ и $\vec{F}_{a,2}$ (см. рисунок). Условие равновесия поршней дает

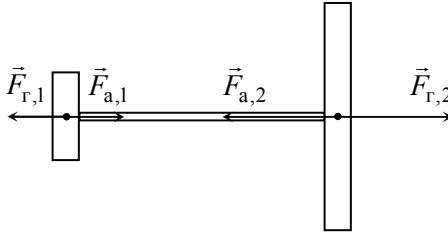
$$\vec{F}_{\Gamma,1} + \vec{F}_{\Gamma,2} + \vec{F}_{a,1} + \vec{F}_{a,2} = 0 \quad (1)$$

или

$$pS_1 - p_a S_1 + p_a S_2 - pS_2 = 0, \quad (2)$$

где p – давление газа между поршнями. Из формулы (2) получаем

$$p(S_2 - S_1) = p_a(S_2 - S_1). \quad (3)$$



Поскольку площадь труб различна, т.е. $S_1 \neq S_2$, из формулы (3) следует, что давление газа между поршнями равно атмосферному $p = p_a$. (Если бы трубы были одинаковы, то условие (3) выполнялось бы благодаря равенству нулю скобки $(S_2 - S_1)$ в правой и левой частях равенства (3), а давление газа между поршнями могло бы быть любым.) При нагревании или охлаждении газа между поршнями давление газа должно остаться равным атмосферному (иначе нарушаются условия равновесия), и, следовательно, процесс, происходящий с газом между поршнями, является изобарическим. Это значит, что при нагревании газа между поршнями объем газа между ними должен возрасти, поршни сместятся вправо, при охлаждении поршни сместятся влево. Поскольку при смещении поршня вправо до стыка труб объем газа станет равен $2S_2l$ (l – расстояние от поршня до стыка в начальном состоянии), а в начальном состоянии он равен $S_1l + S_2l$, по закону Гей-Люссака

$$\frac{S_1l + S_2l}{T_0} = \frac{2S_2l}{T_1}$$

находим искомую температуру газа

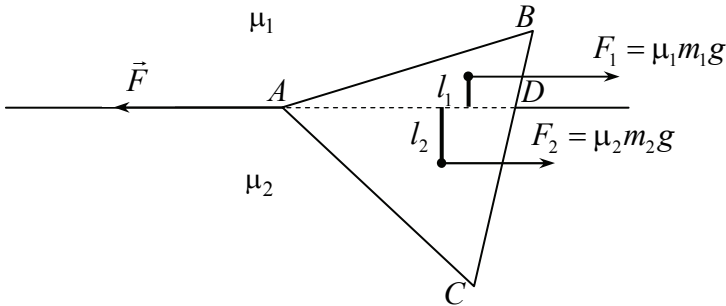
$$T_1 = \frac{2S_2T_0}{S_1 + S_2}.$$

5. Поскольку треугольник перемещают равномерно, то внешняя сила F , которая перемещает треугольник, равна суммарной силе трения:

$$F = \mu_1 m_1 g + \mu_2 m_2 g, \quad (1)$$

где m_1 и m_2 – массы частей треугольника, находящихся над первой и второй полуплоскостью (см. рисунок, эти части обозначены, как ABD и ACD). Из-за разности коэффициентов трения треугольник будет располагаться несимметрично относительно границы полуплоскостей, и потому массы m_1 и m_2 заранее нам неизвестны. Однако одно утверждение относительно этих масс довольно очевидно. Поскольку высоты треугольников ABD и ACD , опущенные из вершины A , одинаковы, их площади, а следовательно, и массы относятся так же, как и длины их оснований

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{BD}{CD}. \quad (2)$$



Найдем теперь массы m_1 и m_2 треугольников ABD и ACD . Для этого заметим, что поскольку треугольник движется равномерно, то и сумма моментов всех действующих на него сил относительно любой точки равна нулю. В частности, должна быть равна нулю сумма моментов сил трения относительно той вершины, к которой приложена внешняя сила F . Моменты сил трения можно вычислить из следующих соображений. Треугольник движется поступательно, поэтому силы трения, действующие на любые малые элементы треугольника, направлены противоположно силе F и пропорциональны массам этих элементов. Поэтому моменты сил трения можно вычислять так же, как и момент силы тяжести, действующей на протяженное тело – приложить суммарную силу трения, действующую на части треугольника к их центрам тяжести. На рисунке

центры тяжести треугольников ABD и ACD показаны жирными точками, плечи сил трения – жирными отрезками. Из вышеприведенных рассуждений получаем

$$\mu_1 m_1 g l_1 = \mu_2 m_2 g l_2, \quad (3)$$

где l_1 и l_2 – плечи сил трения $\mu_1 m_1 g$ и $\mu_2 m_2 g$ (см. рисунок).

Используем теперь то обстоятельство, что центр тяжести плоского треугольника расположен в точке пересечения его медиан, и что эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1. Поэтому плечи l_1 и l_2 составляют $2/3$ от длины перпендикуляров, опущенных из середин сторон BD и CD на границу полуплоскостей, и $1/3$ от длин перпендикуляров, опущенных из вершин B и C на эту границу. А поскольку отрезки BD и CD наклонены к границе раздела полуплоскостей под одинаковыми углами, то

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{BD}{CD}. \quad (4)$$

Поэтому из формул (1), (3), (4) заключаем, что отношение масс треугольников ABD и ACD равно квадратному корню из отношения коэффициентов трения:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (5)$$

Теперь используя уравнение (3) и очевидное условие $m_1 + m_2 = m$ (где m – масса треугольника ABC), находим массы m_1 и m_2 :

$$m_1 = \frac{m\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad m_2 = \frac{m\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad (6)$$

а затем из формулы (1) – внешнюю силу F , которую нужно приложить к вершине треугольника, чтобы равномерно перемещать треугольник по границе полуплоскостей

$$F = mg\sqrt{\mu_1\mu_2}.$$

г. Мирный, апрель 2009 г.

1. Так как тело движется вместе с лифтом, ускорение лифта равно ускорению тела. Найдём последнее. Для этого воспользуемся

вторым законом Ньютона для тела. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила со стороны пола лифта \vec{F} , направленная вертикально вверх, модуль которой равен данному в условии значению F (см. рисунок). Поэтому второй закон Ньютона для тела в проекциях на ось, направленную вертикально вверх, имеет вид

$$ma_x = F - mg,$$

где a_x – проекция ускорения тела на рассматриваемую ось. Отсюда находим ускорение тела (которое равно ускорению лифта)

$$a_x = \frac{F}{m} - g = -5 \text{ м/с}^2.$$

Знак минуса для проекции ускорения на выбранную ось показывает, что вектор ускорения тела направлен противоположно этой оси, т.е.

вертикально вниз, а величина ускорения есть $a = 5 \text{ м/с}^2$.

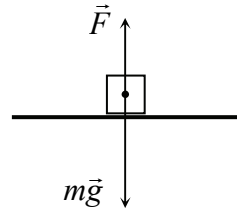
2. Закон Клапейрона – Менделеева для начального и конечного состояний газа в рассматриваемом процессе дает

$$\begin{aligned} p(V + \Delta V) &= \nu RT_1; \\ pV &= \nu RT_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где p – давление; V – объем в конечном состоянии; ν – количество вещества газа. Деля первое уравнение (1) на второе и решая полученное уравнение, найдем

$$V = \frac{T_2 \Delta V}{T_1 - T_2}.$$

3. Изображение источника, находящегося на главной оптической оси линзы, лежит также на главной оптической оси. При перемещении источника по отношению к линзе перемещается и его изображение. Если при этом источник перемещается перпендикулярно главной оптической оси, его изображение будет также перемещаться перпендикулярно главной оптической оси (это следует, например, из формулы линзы, в которую не входят расстояния от источника и предмета до главной оптической оси). Этот вывод иллюстрируется рисунком, на котором источником S и S_1 отвечают



изображения S' и S'_1 . Перемещение изображения a' можно найти из подобия треугольников SS_1O и $S'S'_1O$ (см. рисунок):

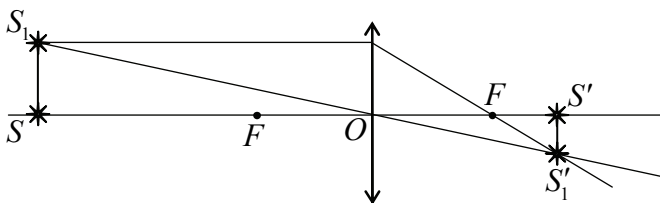
$$\frac{a}{a'} = \frac{d}{f} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{af}{d}, \quad (1)$$

где $d = SO$ – расстояние от источника до линзы; $f = S'O$ – расстояние от изображения до линзы. Далее по формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

находим

$$f = \frac{dF}{d - F}. \quad (2)$$



Из формул (1) и (2) получаем

$$a' = \frac{aF}{d - F} = 1 \text{ см.}$$



4. Сила трения, действующая между телом и доской, зависит от того, есть ли между доской и телом проскальзывание. Очевидно, при малых значениях внешней силы F доска будет двигаться с небольшим ускорением, и сила трения, действующая на тело со стороны доски, сможет заставить тело двигаться с тем же ускорением. При увеличении внешней силы сила трения между телом и доской должна возрастать и при некотором значении внешней силы достигнуть максимально возможного значения. При дальнейшем увеличении внешней силы сила трения уже не сможет увлечь тело за доской и между доской и телом возникнет проскальзывание.

Чтобы найти минимальную внешнюю силу, при которой возникает проскальзывание, найдем силу трения, действующую на тело при условии, что проскальзывание отсутствует. В этом случае доска и тело движутся с одинаковым ускорением, которое можно найти из второго закона Ньютона для тела и доски:

$$a = \frac{F}{m + M}. \quad (1)$$

Телу ускорение (1) сообщается силой трения со стороны доски. Поэтому из второго закона Ньютона для тела находим

$$F_{\text{тр}} = \frac{mF}{m + M}. \quad (2)$$

Проскальзывание между телом и доской возникает, если сила трения (2) достигает максимального значения μmg :

$$\mu mg = \frac{mF}{m + M} \quad \Rightarrow \quad F = \mu g(m + M) = 30 \text{ Н}. \quad (3)$$

Поскольку данное в условии значение внешней силы $F = 20 \text{ Н}$ меньше минимальной силы, вызывающей проскальзывание (3), то тело не будет скользить относительно доски, и сила трения, действующая на него со стороны доски, определяется выражением (2)

$$F_{\text{тр}} = \frac{mF}{m + M} = 3,3 \text{ Н}.$$

5. Найдем сначала эквивалентное сопротивление представленной электрической цепи. Для этого используем следующий прием. Поскольку данная цепь бесконечна, то выбрасывание из нее одного повторяющегося звена – резистора и вольтметра, взятых на рис. 1 в пунктирную рамку, – не изменяет ее сопротивление. Поэтому для эквивалентного сопротивления цепи справедливо соотношение, которое показано графически на рис. 2, на котором R – эквивалентное сопротивление цепи, r – сопротивление резистора и вольтметра. Из этого рисунка получаем уравнение для эквивалентного сопротивления

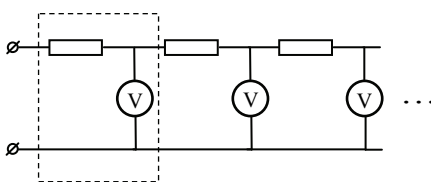


Рис. 1

$$R = r + \frac{rR}{r + R}, \quad (1)$$

или

$$R^2 - rR - r^2 = 0. \quad (2)$$

Решая квадратное уравнение (2), находим

$$R = \frac{(1 + \sqrt{5})r}{2} \quad (3)$$

(второй корень уравнения является отрицательным).

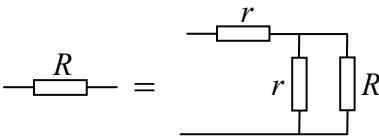


Рис. 2

Сумму показаний всех вольтметров можно найти из следующих соображений. Поскольку сопротивление каждого вольтметра r , то если вольтметр показывает напряжение U_i , для тока через него I_i справедливо соотношение

$$U_i = rI_i. \quad (4)$$

Поэтому для суммы показаний всех вольтметров имеем

$$\sum_i U_i = r \sum_i I_i. \quad (5)$$

А поскольку при параллельном соединении элементов токи складываются, то сумма токов, текущих через все вольтметры, равна току, втекающему в электрическую цепь, т.е.

$$\sum_i I_i = \frac{U}{R} = \frac{2U}{(1 + \sqrt{5})r}. \quad (6)$$

Отсюда и из формулы (5) окончательно получаем

$$\sum_i U_i = \frac{2U}{(1 + \sqrt{5})}.$$

г. Новгород, апрель 2009 г.

1. См. решение задачи 1 из заключительного тура, г. Мирный.
2. См. решение задачи 2 из заключительного тура, г. Мирный.

3. Поскольку через сопротивления R_1 , R_2 и R_3 течет одинаковый ток, из закона Джоуля – Ленца

$$P = I^2 R$$

следует, что среди этих сопротивлений наибольшая тепловая мощность будет выделяться на сопротивлении R_3 . Аналогично среди сопротивлений R_4 , R_5 и R_6 наибольшая мощность будет выделяться на сопротивлении R_6 .

Сравним мощности тока на сопротивлениях R_3 и R_6 . По закону Ома для участка цепи найдем силу тока в верхнем и нижнем участках цепи

$$I_{\text{в}} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad I_{\text{н}} = \frac{U}{R_4 + R_5 + R_6},$$

где U – напряжение, приложенное к цепи, а затем по закону Джоуля – Ленца – мощности, выделяемые на сопротивлениях R_3 и R_6 :

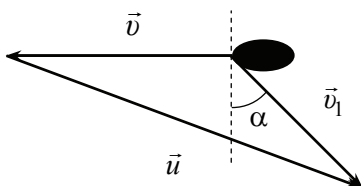
$$P_3 = \frac{U^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} = \frac{3U^2}{36} \text{ [Вт]},$$

$$P_6 = \frac{U^2 R_6}{(R_4 + R_5 + R_6)^2} = \frac{6U^2}{225} \text{ [Вт]}. \quad (1)$$

Поскольку $P_3 > P_6$ (приблизительно в три раза), из формулы (1) заключаем, что наибольшая мощность в приведенной схеме будет выделяться на сопротивлении R_3 . При $U = 100$ В вычисления по первой из формул (1) дают

$$P_3 = 833 \text{ Вт}.$$

4. Треугольник сложения скоростей, отвечающий рассматриваемой в задаче ситуации, изображен на рисунке. Здесь \vec{v} – вектор скорости корабля относительно земли (направленный по условию «на запад»); \vec{v}_1 – вектор скорости ветра относительно земли, который по условию направлен на юго-восток под углом α к меридиану (пунктирный отрезок, перпендикулярный



вектору \vec{v}). Третий вектор в этом треугольнике \vec{u} , равный разности $\vec{v}_1 - \vec{v}$, согласно закону сложения скоростей представляет собой скорость ветра относительно корабля.

По условию известны: значения скоростей корабля относительно земли v и ветра относительно корабля u (т.е. длины соответствующих сторон треугольника), а также угол α (см. рисунок). По теореме косинусов имеем

$$u^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = v^2 + v_1^2 + 2vv_1 \sin \alpha,$$

или

$$v_1^2 + 2vv_1 \sin \alpha + v^2 - u^2 = 0. \quad (1)$$

Решая квадратное уравнение (1) относительно неизвестной скорости v_1 , получим

$$v_1 = -v \sin \alpha + \sqrt{u^2 - v^2 \cos^2 \alpha}$$

(выражение под корнем положительно, поскольку вектор скорости ветра относительно земли направлен на юго-восток). Второй корень квадратного уравнения (1) является отрицательным и, следовательно, не может определять величину скорости.

5. Поскольку заряды палочки движутся в магнитном поле, на палочку действует сила Лоренца. Для ее вычисления мысленно разобьем палочку на бесконечно малые элементы, вычислим силу Лоренца, действующую на каждый элемент, и просуммируем найденные силы.

На каждый точечный элемент палочки с зарядом Δq_i со стороны магнитного поля действует сила, величиной

$$\Delta F_i = \Delta q_i v_i B, \quad (1)$$

где v_i – скорость этого элемента (в (1) учтено, что скорости элементов палочки перпендикулярны вектору индукции магнитного поля). Вектор $\vec{\Delta F}_i$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{v}_i и \vec{B} , т.е. силы $\vec{\Delta F}_i$ для всех элементов палочки лежат в плоскости рисунка, но имеют разные направления для разных элементов, поскольку векторы их скоростей направлены по-разному.

Суммирование векторов $\Delta\vec{F}_i$ удобно выполнить следующим образом. Представим векторы скоростей всех элементов палочки \vec{v}_i как сумму вектора скорости нижнего конца палочки \vec{v} и вектора \vec{v}'_i , представляющего собой вектор скорости этого элемента в системе отсчета, связанной с нижним концом палочки (такая возможность определяется законом сложения скоростей)

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}'_i. \quad (2)$$

Подставим далее скорость (2) в формулу (1). Тогда очевидно, что вектор силы Лоренца $\Delta\vec{F}_i$ будет равен сумме векторов $\Delta\vec{F}$ и $\Delta\vec{F}'_i$, величины которых определяются скоростями v и v'_i

$$\Delta F = \Delta q_i v B, \quad \Delta F'_i = \Delta q_i v'_i B, \quad (3)$$

причем вектор $\Delta\vec{F}$ направлен перпендикулярно векторам \vec{v} и \vec{B} , а вектор $\Delta\vec{F}'_i$ – перпендикулярно векторам \vec{v}'_i и \vec{B} . Поэтому для вычисления суммарной силы Лоренца, действующей на всю палочку, мож-

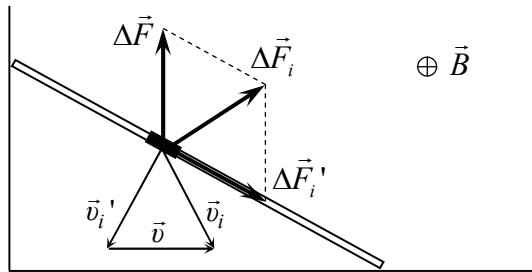


Рис. 1

но сначала просуммировать векторы $\Delta\vec{F}$ и $\Delta\vec{F}'_i$ для всех ее элементов, а затем сложить получившиеся векторы. На рис. 1 выделен один из элементов палочки; тонкими стрелками показаны векторы его скорости относительно земли \vec{v}_i и нижнего конца \vec{v}'_i , образующие треугольник сложения скоростей с вектором скорости нижнего конца палочки \vec{v} . Жирными стрелками на рисунке показаны силы $\Delta\vec{F}$, $\Delta\vec{F}'_i$ для этого элемента и суммарная сила Лоренца $\Delta\vec{F}_i$, действующая на этот элемент палочки.

Векторы $\Delta\vec{F}$ для всех элементов стержня суммируются элементарно. Действительно, векторы $\Delta\vec{F}$ для всех элементов палочки направлены одинаково (перпендикулярно векторам \vec{v} и \vec{B} , т.е. вертикально вверх), поэтому вектор их суммы \vec{F} направлен вертикально вверх и равен по величине

$$F = \sum_i \Delta F = \sum_i \Delta q_i v B = qvB. \quad (4)$$

Для суммирования векторов $\Delta\vec{F}'_i$ заметим, что движение палочки в системе отсчета, связанной с ее нижней точкой, представляет собой вращение, поэтому векторы скоростей всех элементов палочки в этой системе отсчета направлены перпендикулярно палочке, и, следовательно, векторы $\Delta\vec{F}'_i$ для всех элементов палочки направлены вдоль нее. Потому и вектор их суммы \vec{F}' направлен вдоль палочки, а его величина определяется соотношением

$$F' = \sum_i \Delta q_i v'_i B. \quad (5)$$

Величины скоростей элементов палочки относительно ее нижнего конца пропорциональны расстоянию от них до нижнего конца палочки (это также связано с тем, что в системе отсчета, связанной с нижним концом, движение палочки представляет собой вращение). А поскольку скорость верхнего конца в системе отсчета, связанной с нижним концом, равна $v/\sin\alpha$, то скорость элемента палочки, лежащего на расстоянии x от ее нижней точки в этой системе отсчета, равна

$$v'_i = \frac{vx}{l \sin \alpha}. \quad (6)$$

Подставляя скорость (6) в формулу (5) и учитывая, что заряд элемента палочки длиной Δx_i равен $\Delta q_i = q\Delta x_i / l$, где q – заряд палочки, получим

$$F' = \frac{qvB}{l^2 \sin \alpha} \sum_i x_i \Delta x_i. \quad (7)$$

Сумму в (7) можно вычислить, если заметить, что точно такая же сумма определяет работу силы упругости и потому равна $l^2/2$. В результате из (2) получаем

$$F' = \frac{qvB}{2\sin\alpha}. \quad (8)$$

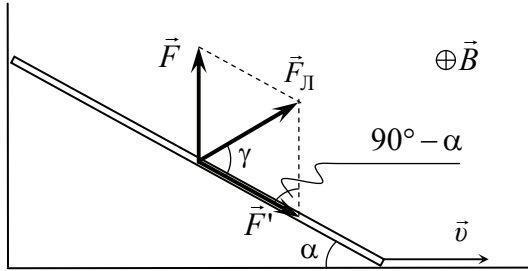


Рис. 2

Таким образом, сила Лоренца \vec{F}_L , действующая на палочку, равна сумме двух векторов: вектора \vec{F} , который направлен вертикально вверх и имеет величину, определяемую формулой (4), и вектора \vec{F}' , который направлен вдоль палочки и имеет величину (8) (рис. 2). Учитывая, что один из углов параллелограмма сложения сил равен $90^\circ - \alpha$ (этот угол показан на рис. 2), и используя (4) и (8), найдем по теореме косинусов

$$F_L = \sqrt{F^2 + F'^2 - 2FF' \sin\alpha} = \frac{qvB}{2\sin\alpha}. \quad (9)$$

Угол между вектором \vec{F}_L и палочкой (на рис. 2 этот угол обозначен буквой γ) найдем по теореме синусов:

$$\frac{F_L}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{F}{\sin\gamma}. \quad (10)$$

Используя (4), (9), находим отсюда угол между вектором \vec{F}_L и палочкой

$$\sin\gamma = 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha, \quad \gamma = 2\alpha. \quad (11)$$

гг. Новоуральск, Северск, апрель 2009 г.

1. См. решение задачи 3 из заключительного тура от 5 апреля 2009 г., г. Москва.

2. Из закона Клапейрона – Менделеева для начального и конечного состояний газа получим

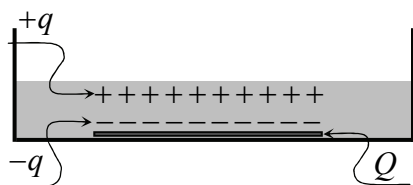
$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$$

Откуда

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} T_0.$$

3. См. решение задачи 3 из заключительного тура, г. Новгород.

4. См. решение задачи 4 из заключительного тура, г. Мирный.



5. Диэлектрик, находящийся в поле пластинки, будет поляризован, причем около пластинки будут индуцированы отрицательные заряды, на внешней поверхности – равные им по величине положи-

тельные (см. рисунок). Найдем величину индуцированных зарядов. С одной стороны, поле в диэлектрике ослабляется в ϵ раз по сравнению с вакуумом (ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика)

$$E = \frac{Q}{2S\epsilon\epsilon_0}, \quad (1)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; S – площадь пластинки; с другой – создается независимо всеми имеющимися зарядами. В пренебрежении краевыми эффектами имеем по принципу суперпозиции для напряженности электрического поля в диэлектрике

$$E = \frac{Q}{2S\epsilon_0} - \frac{q}{S\epsilon_0}, \quad (2)$$

где q – величина индуцированных зарядов (см. рисунок). Приравняв поля (1) и (2) и решая полученное уравнение, находим индуцированный заряд q :

$$q = \frac{Q(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь положительные заряды, индуцированные на внешней поверхности жидкого диэлектрика. Они находятся в поле зарядов пластинки и отталкиваются от них. Кроме того, существует притяжение этих зарядов к отрицательным зарядам, индуцированным на поверхности диэлектрика, примыкающей к пластинке. Поскольку величина индуцированных зарядов меньше заряда пластинки, то результирующая сила, действующая на заряд q , расположенный на внешней поверхности, направлена вертикально вверх.

Величину суммарной силы можно найти из следующих соображений. В пренебрежении краевыми эффектами величина силы взаимодействия двух параллельных заряженных плоскостей есть

$$\frac{Q_1 Q_2}{2S\varepsilon_0},$$

где Q_1 и Q_2 – заряды плоскостей; S – их площадь. Поэтому сила, действующая на заряд q (3) со стороны заряда $-q$ и заряда пластинки Q , равна

$$F = \frac{Qq}{2S\varepsilon_0} - \frac{q^2}{2S\varepsilon_0} = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8S\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4)$$

В результате уровень жидкости над пластинкой повысится, и сила (4) будет компенсироваться избыточной силой тяжести, действующей на эту жидкость. Если уровень поднимется на величину Δh , то условие равновесия жидкости будет иметь вид

$$\rho\Delta hSg = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8S\varepsilon\varepsilon_0},$$

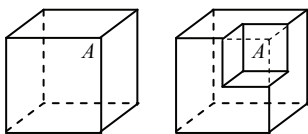
где ρ – плотность жидкости. Отсюда (пренебрегая изменением уровня жидкости в остальной части сосуда) находим величину подъема уровня жидкости над пластинкой

$$\Delta h = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8\rho g S^2 \varepsilon \varepsilon_0}.$$

Отметим в заключение, что рассмотренное в данной задаче явление деформации диэлектрика в электрическом поле благодаря его поляризации носит название электрострикции.

г. Обнинск, апрель 2009 г.

1. См. решение задачи 1 из заключительного тура, г. Мирный.
2. См. решение задачи 2 из заключительного тура, 9 апреля 2009 г., г. Москва.
3. См. решение задачи 3 из заключительного тура, г. Новгород.
4. См. решение задачи 4 из Олимпиады памяти И.В. Курчатова.



5. Для вычисления напряженности электрического поля, создаваемого некоторым распределенным зарядом необходимо разделить этот заряд на точечные элементы, найти вектор напряженности поля, создаваемого каждым зарядом, сложить полученные векторы. Конечно, при проведении этой процедуры не обойтись без высшей математики. Однако поскольку в данной задаче рассматриваются только кубическое распределение или комбинация двух кубических распределений зарядов, и поле одного из них задано, можно попробовать выразить одно поле через другое, используя соображения размерности и подобия.

Из соображений размерности заключаем, что напряженность поля куба в точке A должна зависеть от заряда куба Q и некоторого параметра размерности длины. А поскольку в данной задаче есть только один параметр размерности длины – ребро куба a , то напряженность поля куба в точке A (которая задана условием задачи и равна E_0) есть

$$E_0 = K \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2}, \quad (1)$$

где K – безразмерный коэффициент пропорциональности, который одинаков для всех кубических распределений зарядов. Поле (1) удобно выразить через плотность зарядов куба. Вводя плотность заряда $\rho = Q/a^3$, получим из (1)

$$E_0 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho a. \quad (2)$$

Поле куба с вырезанным куском, который также имеет форму куба с ребром a_1 , есть разность двух полей типа (2), причем с одинаковым безразмерным коэффициентом K и одной и той же плотностью электрического заряда:

$$E_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho a - \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho a_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho (a - a_1). \quad (3)$$

Формула (3) определяет поле куба с вырезанным куском при неизменной плотности зарядов оставшейся части (т.е. в случае, когда заряды вырезанной части удаляют). В нашем же случае этот заряд добавляют к заряду оставшейся части. Это приведет к изменению плотности заряда оставшейся части: $\rho \rightarrow \rho_1$ и напряженности поля (3):

$$E_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho_1 (a - a_1). \quad (4)$$

Новая плотность заряда определяется отношением заряда оставшейся части к ее объему. А поскольку заряд оставшейся части после добавления к нему заряда вырезанной части равен первоначальному заряду куба, а объем – разности объемов куба и вырезанной части, для ρ_1 имеем

$$\rho_1 = \frac{Q}{a^3 - a_1^3} = \frac{Q}{a^3} \frac{a^3}{a^3 - a_1^3} = \rho \frac{a^3}{a^3 - a_1^3}. \quad (5)$$

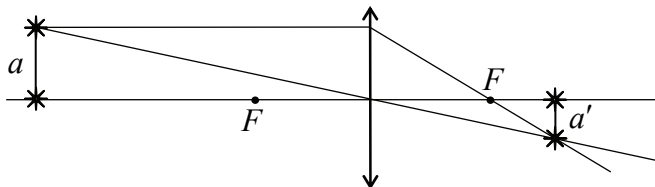
Подставляя теперь плотность заряда (5) в формулу (4) и используя (2), находим окончательно

$$E_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho \frac{a^3}{a^3 - a_1^3} (a - a_1) = \frac{K}{4\pi\epsilon_0} \rho a \frac{a^2 (a - a_1)}{a^3 - a_1^3} = E_0 \frac{a^2 (a - a_1)}{a^3 - a_1^3}.$$

гг. Саров, Электрогорск, апрель 2009 г.

1. См. решение задачи 1 из заключительного тура, г. Мирный.
2. Изображение точечного источника, находящегося на главной оптической оси, лежит на главной оптической оси. Если бы на рас-

стояние a перпендикулярно главной оптической оси переместился источник, то изображение переместилось бы на некоторое расстояние a' перпендикулярно главной оптической оси, но в другую сторону (см. рисунок). Поэтому перемещение источника при перемещении линзы есть $\Delta = a + a'$. Найдем величину a' .



По формуле линзы имеем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где f – расстояние от изображения до линзы. Отсюда

$$f = \frac{dF}{d - F}$$

и

$$a' = \frac{f}{d} a = \frac{Fa}{d - F}. \quad (1)$$

Теперь из формулы (1) находим перемещение изображения:

$$\Delta = a + \frac{Fa}{d - F} = \frac{da}{d - F} = 3 \text{ см.}$$

3. См. решение задачи С1 из пробного экзамена в форме ЕГЭ от 1 марта 2009 г.

4. Применим к движению тела теорему об изменении кинетической энергии

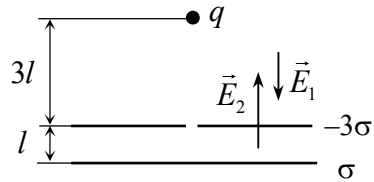
$$\frac{mv^2}{2} = A, \quad (1)$$

где v – скорость тела около пластины с поверхностной плотностью заряда σ ; A – работа электрического поля над телом на пути от начальной точки до этой пластины. Если работа A окажется отрицательной, то уравнение (1) относительно скорости тела не будет

иметь решения, и, следовательно, тело не достигнет пластины с поверхностной плотностью заряда σ . Найдем работу поля.

Для этого найдем напряженность электрического поля между пластинками и вне пластин. По принципу суперпозиции находим, что поле вне пластин с той стороны, где находится тело, направлено к пластинам, а его величина в пренебрежении краевыми эффектами равна

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2)$$



(см. рисунок). Поле между пластинами направлено к пластине с зарядом -3σ , а его величина равна

$$E_2 = \frac{2\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Из формул (2), (3) имеем для работы поля над положительным зарядом на пути от начальной точки до пластины с поверхностной плотностью заряда σ

$$A = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} 3l - \frac{2q\sigma}{\epsilon_0} l = \frac{q\sigma l}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Из формулы (4) видим, что работа поля положительна, и, следовательно, тело достигнет пластины с поверхностной плотностью заряда σ . Скорость тела около этой пластины находим из формулы (1)

$$v = \sqrt{\frac{2q\sigma l}{m\epsilon_0}}.$$

5. При малых значениях внешней силы F пачка бумаги будет покоиться, поскольку силы трения между листами бумаги и бумагой и поверхностью смогут «удержать» пачку в равновесии. При увеличении внешней силы будут расти силы трения между всеми листами, но пока сила трения между какими-то из них не достигнет максимального значения, пачка будет покоиться. Когда внешняя сила достигнет такого значения, что сила трения между какими-то листами бумаги, или пачкой и поверхностью достигнет максимального значения

$$\mu N, \quad (1)$$

где N – сила реакции, между этими поверхностями, возникнет проскальзывание. Давайте вычислим силы трения между разными поверхностями и ответим на вопрос, где проскальзывание начнется раньше, и при каких соотношениях между коэффициентами трения пачка может двигаться как целое, не «рассыпаясь». При этом нужно рассмотреть трение между листами бумаги, расположенными выше того листа, за который тянут, ниже этого листа и между пачкой и поверхностью.

Итак, рассмотрим такие значения внешней силы F , при которых пачка покоится. Очевидно, что в этом случае сила трения между листами, лежащими выше листа, за который тянут, равна нулю. Действительно, на эти листы бумаги в горизонтальном направлении может действовать только сила трения, но поскольку они покоятся, то сила трения равна нулю. Поэтому проскальзывание может начаться либо между листами, расположенными ниже того листа, за который тянут, либо между пачкой и поверхностью. Чтобы найти силу трения между пачкой и поверхностью (в случае покоящейся пачки), рассмотрим условие равновесия всей пачки. Внешними по отношению к ней силами являются сила F и сила трения между пачкой и поверхностью $F_{\text{тр}}$. Поэтому пока пачка покоится

$$F_{\text{тр}} = F. \quad (2)$$

Из формулы (2) видим, что при увеличении внешней силы F сила трения между пачкой и поверхностью будет возрастать и при

$$F > \mu_1 Mg \quad (3)$$

достигнет максимального значения – пачка начнет скользить по поверхности.

Получим теперь условие проскальзывания между листами бумаги, расположенными на некоторой высоте x от поверхности ниже того листа, за который тянут. Поскольку сила реакции на этой высоте равна Mgx/h , где h – толщина пачки, то скольжение между листами, расположенными на этой высоте начнется, если

$$F > \mu Mg \frac{x}{h}. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что проскальзывание между листами начнется при максимальной величине x , т.е. сразу под тем листом, за который тянут, при

$$F > (\mu / 5)Mg . \quad (5)$$

Из сравнения формул (3) и (5) заключаем, что если

$$\mu < 5\mu_1 , \quad (6)$$

скольжение начнется под листом, за который тянут, и, следовательно, пачка не будет двигаться как целое ни при каких значениях силы F . Если же

$$\mu > 5\mu_1 , \quad (7)$$

то существуют такие значения внешней силы (лежащие в интервале $\mu_1 Mg < F < (\mu / 5)Mg$), при которых пачка скользит как целое и не «рассыпается». При дальнейшем увеличении внешней силы сначала начнется проскальзывание ниже того листа, за который тянут, а затем и выше. Таким образом, пачка может двигаться как целое при выполнении условия (7) для коэффициентов трения и для значений внешней силы, лежащих в указанном выше интервале.

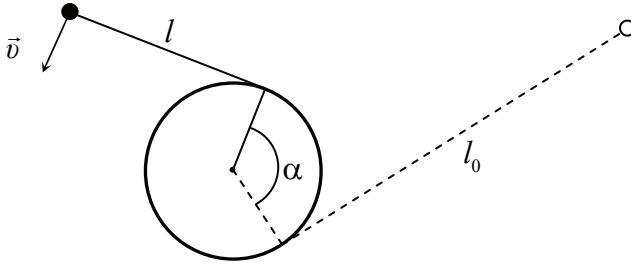
г. Смоленск, апрель 2009 г.

1. См. решение задачи 1 из заключительного тура, г. Мирный.
2. См. решение задачи 2 из заключительного тура, г. Мирный.
3. См. решение задачи 3 из заключительного тура, г. Новгород.
4. См. решение задачи 4 из заключительного тура, г. Мирный.

5. Установим зависимость угла поворота нити от времени. Вспервах, заметим, что нить в процессе движения тела всегда перпендикулярна скорости тела (нить не «сминается» и не растягивается). Поэтому сила натяжения не совершает над телом работу, и, следовательно, тело движется с постоянной скоростью. А поскольку движение тела в течение каждого малого интервала времени можно считать вращением вокруг той точки, где нить отходит от цилиндра, то угловая скорость вращения тела зависит от времени.

Пусть к некоторому моменту времени t нить повернулась на угол α по сравнению с первоначальным положением. Установим связь между t и α . Поскольку к этому моменту на цилиндр намоталась нить длиной αR , то для длины нити справедливо соотношение

$$l = l_0 - \alpha R . \quad (1)$$



Из формулы (1) следует, что угловая скорость нити в этот момент будет равна $\omega = v / (l_0 - \alpha R)$. Поэтому за бесконечно малый интервал времени Δt около момента времени t нить повернется на бесконечно малый угол

$$\Delta\alpha = \omega\Delta t = \frac{v\Delta t}{l_0 - \alpha R}. \quad (2)$$

Из формулы (2) можно найти производную функции $t(\alpha)$:

$$t'(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} = \frac{l_0}{v} - \frac{R}{v}\alpha. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что производная функции $t(\alpha)$ зависит от своего аргумента α так же, как скорость равноускоренно движущегося тела зависит от времени

$$x'(t) = v_0 + at, \quad (4)$$

где v_0 и a – начальная скорость и ускорение тела. Поэтому зависимость $t(\alpha)$ – такая же, как и зависимость координаты равноускоренно движущегося тела от времени

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}. \quad (5)$$

Причем, как это следует из сравнения (3) и (4), в качестве v_0 и a в зависимости $t(\alpha)$ нужно использовать величины l_0/v и $-R/v$:

$$t(\alpha) = t_0 + \frac{l}{v}\alpha - \frac{R}{v}\frac{\alpha^2}{2}. \quad (6)$$

Величина t_0 в выражении (5) имеет смысл «начального» значения времени, т.е. времени, отвечающего повороту на нулевой угол. Поэтому эту величину нужно положить равной нулю. В результате окончательно имеем

$$t(\alpha) = \frac{l}{v} \alpha - \frac{R}{v} \frac{\alpha^2}{2}. \quad (7)$$

Из зависимости (7) легко найти время τ , необходимое для полной намотки нити на цилиндр. Действительно, когда нить полностью наматывается на цилиндр, она должна повернуться на угол $\alpha = l/R$. Поэтому для времени τ имеем из (7):

$$\tau = \frac{l}{v} \frac{l}{R} - \frac{R}{v} \frac{l^2}{2R^2} = \frac{l^2}{2vR}.$$

г. Снежинск, март 2009 г.

1. Рассматривая движение жука вдоль периметра, найдем его скорость

$$v = \frac{4a}{t}$$

(a – длина стороны квадрата), которую затем используем для рассмотрения движения жука вдоль диагонали

$$t_1 = \frac{\sqrt{2}a}{2v} = \frac{\sqrt{2}t}{8}.$$

2. По формуле линзы имеем:

$$\frac{1}{l+F} + \frac{1}{x+F} = \frac{1}{F},$$

где $l+F$ – расстояние от источника до линзы; $x+F$ – расстояние от изображения до линзы (x – искомое расстояние от изображения до фокуса). Отсюда находим

$$x = \frac{F^2}{l} = 40 \text{ см.}$$

3. См. решение задачи С1 из пробного экзамена в форме ЕГЭ от 1 марта 2009 г.

4. Применим к движению точечного заряда теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = -q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1)$$

где v – искомая скорость точечного заряда в тот момент, когда окажется на расстоянии $3R/2$ от центра сфер; φ_1 и φ_2 – потенциалы электрического поля, создаваемого сферами, в точках на расстоянии $4R$ и $3R/2$ от центра сфер соответственно. По принципу суперпозиции полей потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Потенциал поля сферы радиусом R , равномерно заряженной зарядом Q , в точке на расстоянии r от ее центра равен

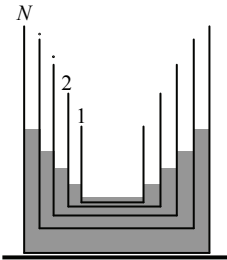
$$\varphi = \frac{kQ}{r}, \text{ если } r > R, \text{ и } \varphi = \frac{kQ}{R}, \text{ если } r < R \quad (2)$$

($k = 1/4\pi\epsilon_0$ – постоянная в законе Кулона). Отсюда находим потенциалы φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_1 = \frac{kQ}{4R} + \frac{k3Q}{4R} = \frac{kQ}{R}, \quad \varphi_2 = \frac{kQ}{(3R/2)} + \frac{k3Q}{2R} = \frac{13kQ}{6R}. \quad (3)$$

Подставляя потенциалы (3) в формулу (1), находим кинетическую энергию, а затем и скорость точечного заряда на расстоянии $3R/2$ от центра сфер:

$$v = \sqrt{\frac{7kQq}{3mR}}.$$



5. Рассмотрим условие равновесия k -го стакана. Как известно, если в воде плавают, не касаясь дна, какие-то предметы, то если мысленно убрать эти предметы и добавить такое количество воды, чтобы ее уровень не изменился, силы, действующие со стороны воды на дно и стенки сосуда, не изменятся. Поэтому для исследования условия равновесия стакана мысленно удалим из него все внутренние стаканы и дольем воду до прежнего уровня. Тогда силы, действующие на этот стакан, не из-

меняются. На стакан действуют: сила тяжести kmg (km – масса этого стакана), сила со стороны налитой в него воды $\rho S_k h g$ (ρ – плотность воды; S_k и h – площадь дна и высота уровня жидкости в этом стакане) и выталкивающая сила Архимеда $\rho g V_{\text{п.ч}} = \rho g S_k h_1$. Здесь $V_{\text{п.ч}}$ – объем части рассматриваемого стакана, погруженной в воду в следующем стакане; h_1 – глубина его погружения. Из условия равновесия рассматриваемого стакана имеем

$$km = \rho S_k \Delta h, \quad (1)$$

где Δh – разность уровней воды в рассматриваемом стакане и в том стакане, в котором рассматриваемый стакан плавает. А так как площадь дна k -го стакана равна kS , то из условия (1) находим

$$\Delta h = \frac{m}{\rho S}. \quad (2)$$

Из формулы (2) заключаем, что разность уровней воды в двух любых соседних стаканах одинакова. Используем это обстоятельство, чтобы найти высоту уровня воды в самом большом стакане.

Пусть высота уровня воды в этом стакане относительно стола – H . В следующем стакане – $H - \Delta h$, в следующем – $H - 2\Delta h$ и т.д. Поэтому полный объем воды в стаканах равен

$$\begin{aligned} NSH - (N-1)S\Delta h - (N-2)S\Delta h - \dots - S\Delta h = \\ = NSH - S\Delta h(1+2+\dots+(N-1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Используя далее известную формулу для суммы целых чисел

$$1+2+\dots+(N-1) = \frac{(N-1)N}{2},$$

получим из формул (2), (3) для объема воды во всех стаканах

$$NSH - S\Delta h \frac{(N-1)N}{2} = NSH - \frac{m(N-1)N}{\rho}. \quad (4)$$

Из формулы (4) находим полную массу воды

$$M = NSH\rho - \frac{m(N-1)N}{2}, \quad (5)$$

а затем из уравнения (5) и высоту уровня воды в самом большом стакане относительно поверхности стола

$$H = \frac{M}{N\rho S} + \frac{m(N-1)}{2\rho S}.$$

В заключение обратим внимание читателя на следующее интересное (и неожиданное *a priori*) обстоятельство. Высота уровня воды в большом стакане (как и во всех других стаканах) определяется только полной массой воды во всех стаканах и не зависит от того, как вода распределена между стаканами. Это удивительное, на первый взгляд, обстоятельство связано с тем, что разность уровней воды в любых двух соседних стаканах одинакова. Поэтому если, например, долить какое-то количество воды в самый маленький стакан, то он сильнее погрузится в воду, что приведет к подъему уровня воды в следующем стакане, а затем и во всех последующих. Причем величина подъема уровня воды в самом большом стакане будет такой же, как если бы долили дополнительную воду только в этот стакан.

г. Томск, апрель 2009 г.

1. Поскольку расстояние от источника до линзы меньше фокусного расстояния линзы, линза создает мнимое изображение источника. По формуле линзы имеем

$$\frac{1}{(F/n)} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

где F/n – расстояние от источника до линзы; f – расстояние от изображения до линзы. Из формулы (1) находим расстояние

$$f = \frac{F}{n-1},$$

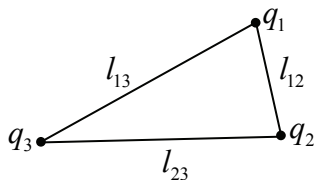
а затем и расстояние Δ между источником и его изображением:

$$\Delta = f - \frac{F}{n} = \frac{F}{n(n-1)} = 5 \text{ см.}$$

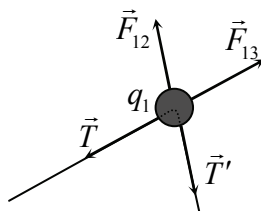
2. См. решение задачи 2 из заключительного тура, г. Мирный.

3. См. решение задачи 3 из заключительного тура, г. Новгород.

4. Благодаря кулоновскому отталкиванию бусинки натянут нить и расположатся в вершинах некоторого треугольника (см. рисунок). Поскольку заряды бусинок разные по величине, положение равновесия бусинок будет достигаться при различных расстояниях между ними. Поэтому треугольник, в который растянется нить, не будет правильным (см. рисунок).



Рассмотрим условия равновесия бусинки с зарядом q_1 . На нее действуют силы отталкивания от зарядов q_2 и q_3 (силы \vec{F}_{12} и \vec{F}_{13} соответственно). Кроме того, на бусинку действует сила со стороны нити, которая равна сумме сил натяжения нити \vec{T} и \vec{T}' в тех точках, где пропадает контакт между нитью и бусинкой



(по аналогии с силой, действующей на блок со стороны переброшенной через него нити). Эти силы, действующие на бусинку с зарядом q_1 , показаны на рисунке. Условие равновесия бусинки имеет вид

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{T} + \vec{T}' = 0. \quad (1)$$

Очевидно, силы \vec{F}_{12} и \vec{T}' направлены вдоль одной и той же прямой (соединяющей заряды q_1 и q_2), силы \vec{F}_{13} и \vec{T} – также вдоль одной и той же, но другой по сравнению с первой, прямой (соединяющей заряды q_1 и q_3). Поэтому, проецируя уравнение (1) на оси, перпендикулярные сначала одной, а затем другой прямой, получим

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{T}'|, \quad |\vec{F}_{13}| = |\vec{T}|. \quad (2)$$

А поскольку величины сил натяжения участков нити между зарядами q_1 и q_2 и между зарядами q_1 и q_3 одинаковы (это одна и та же нить), из формулы (2) заключаем, что $F_{12} = F_{13}$. Аналогично доказываем, что $F_{12} = F_{23}$. Таким образом, в равновесии бусинки занимают такое положение на нити, что силы их взаимодействия

одинаковы (и равны силе натяжения нити). Поэтому с использованием закона Кулона получаем

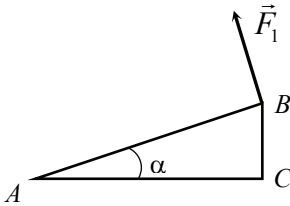
$$F_{12} = T = \frac{kq_1q_2}{l_{12}^2}, \quad F_{13} = T = \frac{kq_1q_3}{l_{13}^2}, \quad F_{23} = T = \frac{kq_2q_3}{l_{23}^2} \quad (3)$$

где $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ – постоянная в законе Кулона; l_{12} , l_{13} и l_{23} – расстояния между бусинками q_1 и q_2 , q_1 и q_3 , q_2 и q_3 . Выражая из формул (3) величины l_{12} , l_{13} и l_{23} и учитывая, что их сумма равна длине нити, получим

$$l = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{T}} + \sqrt{\frac{kq_1q_3}{T}} + \sqrt{\frac{kq_2q_3}{T}}. \quad (4)$$

Из формулы (4) находим силу натяжения нити

$$T = \frac{k(\sqrt{q_1q_2} + \sqrt{q_1q_3} + \sqrt{q_2q_3})^2}{l^2}.$$



5. Обозначим вершины треугольника как A , B и C , причем A – вершина угла α (см. рисунок). Треугольник можно повернуть вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину A , если момент «поворачивающей» силы относительно этой оси будет больше, чем момент силы трения относительно этой

оси. При этом «поворачивающая» сила будет минимальна, если она будет иметь максимальное плечо относительно оси вращения, т.е. будет приложена к вершине другого острого угла и направлена перпендикулярно гипотенузе (см. рисунок). Поэтому для минимальной горизонтальной силы, которая может повернуть треугольник вокруг вершины A , справедливо соотношение

$$F_1 l = M_{ABC,A}, \quad (1)$$

где l – длина гипотенузы; $M_{ABC,A}$ – момент силы трения, действующей на треугольник ABC , относительно вершины A . Аналогичные соотношения можно написать для силы F_2 :

$$F_2 l = M_{ABC,B}, \quad (2)$$

и для искомой силы F_3

$$F_3 l \cos \alpha = M_{ABC,C} \quad (3)$$

(в последнем равенстве использовано то обстоятельство, что плечо силы F_3 должно равняться длине большего катета AC). Так как силы F_1 и F_2 даны в условии, то моменты $M_{ABC,A}$ и $M_{ABC,B}$ нам фактически известны, и, следовательно, для нахождения силы F_3 необходимо связать момент силы трения относительно вершины C с моментами силы трения относительно вершин A и B .

Эту связь в принципе можно установить, «честно» вычисляя моменты силы трения. Для этих вычислений необходимо разбить треугольник на малые элементы и просуммировать моменты сил трения, которые действуют на каждый элемент. При этом, поскольку сила трения, действующая на каждый элемент массой Δm и равная $k\Delta mg$ (k – коэффициент трения), направлена по касательной к окружности, по которой этот элемент поворачивается, силы трения, действующие на разные элементы треугольника, имеют разные направления, и суммарный момент силы трения не сводится к произведению $kmg l_{ц.т.}$, где $l_{ц.т.}$ – расстояние от оси вращения до центра тяжести треугольника. Таким образом, вычисление моментов силы трения представляет собой достаточно сложную математическую задачу и невозможно без уверенного владения высшей математикой.

Поэтому попробуем связать моменты силы трения относительно разных осей, используя соображения размерности и подобия. Поскольку момент силы трения пропорционален величине силы трения и ее плечу, а сила трения пропорциональна массе (и, следовательно, площади) треугольника, то момент силы трения пропорционален кубу линейного размера треугольника (например, кубу длины гипотенузы). Следовательно, для момента силы трения справедливо соотношение

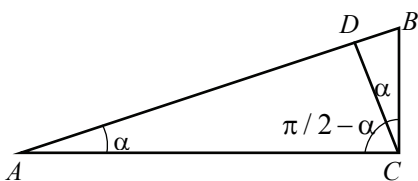
$$M = Kl^3, \quad (4)$$

где K – некоторый коэффициент пропорциональности, который зависит от коэффициента трения, толщины и плотности материала

треугольника, а также угла при той вершине, относительно которой вычисляется момент, но не зависит от размеров треугольника, и, потому, одинаковый у всех подобных треугольников. Используя формулы (1) и (2), можно связать коэффициенты формулы (4) для моментов силы трения относительно вершин A и B с минимальными силами, «поворачивающими» треугольник относительно соответствующих осей:

$$K(\alpha) = \frac{F_1}{l^2}, \quad K(\pi/2 - \alpha) = \frac{F_2}{l^2}, \quad (5)$$

где $K(\alpha)$ и $K(\pi/2 - \alpha)$ – коэффициенты в формуле (4) для моментов силы трения относительно осей, проходящих через вершины A и B .



Найдем теперь момент силы трения относительно вершины C . Для этого опустим перпендикуляр CD из вершины C на гипотенузу (см. рисунок). Этот перпендикуляр делит треугольник

ABC на два прямоугольных треугольника ACD и BCD . Поэтому момент силы трения, действующей на треугольник ABC , относительно вершины прямого угла $M_{ABC,C}$ складывается из моментов сил трения, действующих на треугольники ACD и BCD , относительно вершины C :

$$M_{ABC,C} = M_{ACD,C} + M_{BCD,C}. \quad (6)$$

Так как треугольник ACD подобен треугольнику ABC и $\angle ACD = \pi/2 - \alpha$, то момент силы трения, действующей на треугольник ACD , относительно вершины C определяется формулой (4) с $K \rightarrow K(\pi/2 - \alpha)$ и $l \rightarrow AC$ (так как AC – гипотенуза треугольника ACD):

$$M_{ACD,C} = K(\pi/2 - \alpha)AC^3 = K(\pi/2 - \alpha)l^3 \cos^3 \alpha. \quad (7)$$

Аналогично найдем момент силы трения, действующей на треугольник BCD , относительно вершины C :

$$M_{BCD,C} = K(\alpha)BC^3 = K(\alpha)l^3 \sin^3 \alpha. \quad (8)$$

Подставляя в (7) и (8) выражения для коэффициентов $K(\alpha)$ и $K(\pi/2 - \alpha)$ (5), найдем момент силы трения относительно вершины C :

$$M_{ABC,C} = F_1 l \sin^3 \alpha + F_2 l \cos^3 \alpha. \quad (9)$$

Теперь можно найти силу F_3 . Подставляя момент (9) в формулу (3), получим

$$F_3 l \cos \alpha = F_1 l \sin^3 \alpha + F_2 l \cos^3 \alpha$$

или

$$F_3 = F_1 \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} + F_2 \cos^2 \alpha.$$

Сергей Евгеньевич Муравьев

**ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ
«РОСАТОМ-2009» ПО ФИЗИКЕ
(С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ)**

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет изготовлен М.В. Макаровой

Подписано в печать 12.10.2009. Формат 60x84 1/16
Печ.л. 5,25. Уч.-изд.л. 5,25. Тираж 1000 экз.
Изд. № 094-1. Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

Типография САРМА

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»**

МИФИ – базовое высшее учебное заведение России, предназначенное для подготовки инженеров: физиков, математиков, системотехников – инженеров-исследователей, обладающих глубокими знаниями физико-математических дисциплин в сочетании с серьезной инженерной подготовкой.

ФАКУЛЬТЕТЫ	телефон
Факультет экспериментальной и теоретической физики (Т)	8(495)324-84-40
Физико-технический факультет (Ф)	8(495)324-84-41
Факультет автоматики и электроники (А)	8(495)324-84-42
Факультет кибернетики (К)	8(495)324-84-46
Факультет информационной безопасности (Б)	8(495)324-84-00
Гуманитарный факультет (Г):	8(495)323-90-62
- Институт международных отношений	8(495)323-95-83
- Финансовый институт	8(495)324-03-78
- Институт инновационного менеджмента	8(495)323-90-88
- Экономико-аналитический институт	8(495)323-92-15
- Институт финансовой и экономической безопасности	8(495)323-95-27

ПРИЕМНАЯ КОМИССИЯ 8(495)324-84-17; 8(495)323-95-12

Адрес МИФИ: 115409, г. Москва, Каширское ш., д.31

По вопросам повышения квалификации учителей физики, математики и информатики, а также по работе МИФИ со школами в регионах РФ обращаться в **Центр повышения квалификации и переподготовки кадров** по тел.: 8(495)324-05-08, 8(499)725-24-60.

