ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Ю.Н. Громов

Пособие по физике
«Колебания и волны»

В помощь учащимся 10 – 11 классов

Москва 2009

УДК 534.1(075)
ББК 22.32я7
Г 87

Громов Ю.Н. **УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ФИЗИКЕ «КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ». В помощь учащимся 10 – 11 классов**. – М.: МИФИ, 2009. – 48 с.

Дано систематизированное изложение основного содержания школьного курса физики по разделу "Колебания и волны" в соответствии с требованиями образовательного стандарта для профильных классов общеобразовательных школ. Подобная систематизация необходима, поскольку колебания и волны в школьном курсе физики изучаются отрывочно в течение 9 – 11 классов.

Подробно рассмотрены решения 15 примеров, которые содержат как элементарные задачи, так и нестандартные. Приведены 56 задач различной степени сложности для самостоятельного решения, которые снабжены ответами и указаниями. Звездочкой (*) отмечены задачи, требующие для успешного решения не только уверенного знания школьного курса физики и математики, но и смекалки. Буквами *A*, *B* и *C* отмечены задачи, примерно соответствующие по уровню сложности задачам, предлагаемым в частях Единого государственного экзамена по физике.

Предназначено для углубленного изучения физики. Работа с данным пособием поможет подготовиться к участию в олимпиадах и поступлению в НИЯУ МИФИ и физико-математические лицеи при НИЯУ МИФИ, а также может быть использовано слушателями всех форм подготовительного обучения и студентами младших курсов.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Д.Е. Прохорович

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7262-1174-9

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 20.07.2009. Формат 60x84 1/16.
Печ.л. 3,0. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 4500 экз.
Изд. № 079-1 Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

Типография

КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Определения. Гармонические колебания

Свободные колебания возникают вследствие начального отклонения системы от положения устойчивого равновесия. Например, колебание маятника.

Периодические колебания – такие колебания, при которых значения всех физических величин, характеризующих систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени.

Наименьший промежуток времени T называется *периодом* колебаний.

Математическое определение периодической функции, описывающей периодические колебания: если $f(t)$ периодическая функция, то при любом t функция $f(t+T) = f(t)$.

За один период система совершает одно полное колебание.

Частотой колебаний ν называется число колебаний в единицу времени.

$$\text{частота } (\nu) = \frac{\text{число колебаний}}{\text{время,за которое произошли эти колебания}} = \frac{1}{T}.$$

Из определения частоты следует:

$$\frac{1}{T} = \nu . \tag{1.1}$$

Циклическая, или *круговая*, *частота* ω равна частоте ν, умноженной на 2π:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.2}$$

Размерность периода T = [с], размерность частоты и циклической частоты $\nu = \frac{1}{T} = \left[\text{c}^{-1}\right]$. Единицу частоты, равную одному колебанию за одну секунду, называют *герц* (Гц).

Простейшими периодическими колебаниями являются *гармонические*, при которых физические величины, характеризующие систему, изменяются по *закону синуса или косинуса*.

Этот вид колебаний важен по двум причинам:

во-первых, физические колебания с малой амплитудой часто имеют характер, близкий к гармоническому закону;

во-вторых, любые *периодические колебания могут быть представлены как сумма гармонических колебаний* (ряд Фурье).

Для определенности рассмотрим движение некоторой материальной точки вдоль оси X, при котором координата $x(t)$ зависит от времени по закону косинуса.

В этом случае координата $x(t)$ точки (гармоническое колебание) по определению равна:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1.3}$$

где $x(t)$ – отклонение точки от положения равновесия, принятого за нулевое, в момент времени t; A – максимальное значение отклонения точки от положения равновесия, называемое *амплитудой*; $\Phi = (\omega t + \varphi_0)$ – выражение под косинусом, называемое *фазой колебания* (в случае, если колебания происходят по закону синуса, то фазой будет выражение под знаком синуса); φ_0 – значение фазы колебания Φ в момент времени $t = 0$, называемое *начальной фазой колебания*.

Скорость $v_x(t)$ и ускорение $a_x(t)$ точки вдоль оси X при гармонических колебаниях можно определить, дифференцируя по времени выражение (1.3). А именно:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0); \tag{1.4}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1.5}$$

В этих выражениях:

$A\omega$ – амплитуда скорости (максимальное значение скорости точки);

$A\omega^2$ – амплитуда ускорения (максимальное значение ускорения точки).

Скорость и ускорение точки при гармонических колебаниях также изменяются по гармоническому закону.

Сравнивая выражения (1.3) и (1.5) можно заметить, что отклонение $x(t)$ и ускорение $a_x(t)$ точки связаны соотношением:

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0\,. \qquad (1.6)$$

Полученное уравнение называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.* Это важнейшее уравнение нужно запомнить.

Если Вы из каких-либо законов физики получили для некоторой физической величины x уравнение вида (1.6) ($a_x = \ddot{x} = -\omega^2 x$), то это значит, что физическая величина совершает гармоническое колебание вдоль оси X по гармоническому закону, а коэффициент при x равен квадрату циклической частоты ω^2.

Если в уравнении (1.6) левую и правую части умножить на массу материальной точки m, совершающей гармонические колебания, то получим: $ma_x = -m\omega^2 x = -kx$.

Произведение ma_x дает значение силы, действующей на материальную точку, которая, в свою очередь, пропорциональна смещению точки от положения равновесия x.

$$F = -kx\,. \qquad (1.7)$$

Типичный пример силы, величина которой прямо пропорциональна смещению, – *упругая сила* (закон Гука). Поэтому принято силы, прямо пропорциональные смещению, но по природе не являющиеся упругими, называть *квазиупругими.*

Таким образом, гармонические колебания возникают под действием квазиупругих сил.

Пример 1.1

Рассмотрим движение в вертикальном направлении грузика массой m, прикрепленного к невесомой пружине, жесткостью k (рис. 1.1). Такая система называется пружинным маятником.

Допустим, что длина не нагруженной пружины равна l_0 (рис. 1.1, *а*). Подвесим к этой пружине грузик масссой m (рис. 1.1, *б*).

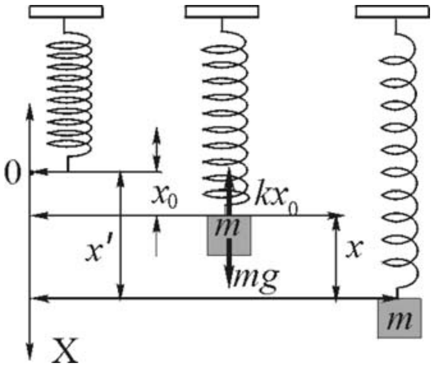


Рис. 1.1

Тогда на грузик m будут действовать силы: mg – сила тяжести; $-kx'$ – сила упругости пружины, где k – жесткость пружины, x' – ее удлинение.

Поместим начало отсчета оси X в точку, где находится конец не нагруженной пружины. Координаты грузика, как материальной точки, в такой системе отсчета будем снабжать штрихом – x'.

Второй закон Ньютона для грузика в проекции на ось X примет вид

$$mg - kx' = ma_{x'}, \quad \text{или} \quad g - \frac{k}{m}x' = a_{x'} \tag{1.8}$$

Это уравнение отличается от уравнения (1.6) тем, что в его левой части есть слагаемое g. Это связано с тем, что помимо силы упругости пружины на грузик действует постоянная сила тяжести mg. Для того чтобы привести уравнение (1.8) к виду (1.6), введем новое начало отсчета, соответствующее положению равновесия грузика.

Положение равновесия грузика определяется выражением: $mg - kx_0' = 0$. Тогда

$$x_0' = \frac{mg}{k}. \tag{1.9}$$

Примем координату x_0' за начало отсчета, и тогда в выбранной системе координат координата грузика будет равна: $x = (x' - x_0')$.

Выразим из этого уравнения координату x' и подставим результат в уравнение (1.8). Получим:

$$-\frac{k}{m}x = a_x \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.6), находим, что грузик m совершает гармонические колебания *около положения равновесия* с циклической частотой ω, равной:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что период колебаний пружинного маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{1.11}$$

Из этого примера можно сделать важный вывод.

Если на материальную точку помимо квазиупругой силы действует некоторая <u>*постоянная*</u> *сила F_0, то точка будет совершать гармоническое колебание около положения равновесия x_0'*. Это положение находится из равенства: $x_0' = \dfrac{F_0}{k}$.

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 гармонических колебаний *не могут* быть найдены из уравнения (1.6). Эти постоянные определяются из начальных (см. пример 1.2) или дополнительных условий (см. пример 1.3).

Уравнение (6) описывает весь комплекс колебаний, которые может совершать рассматриваемая система, а конкретное колебание из этого комплекса выделяется заданием постоянных A и φ_0.

Пример 1.2

Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Скорость материальной точки в начальный момент времени $v_x(0)$ равна $v_{x0} = 2{,}7$ см/с. Начальное смещение точки $x(0)$ равно $x_0 = 0{,}5$ см. Циклическая частота колебаний ω равна π с$^{-1}$.

Найти амплитуду колебаний A и начальную фазу колебаний φ_0.

Движение точки описывается уравнениями (1.3) ÷ (1.5).

Подставляя в уравнения (1.3) и (1.4) значение времени $t = 0$, получим:

$$x(0) = x_0 = A\cos\varphi_0; \qquad (1.12)$$

$$v_x(0) = v_{x0} = -A\omega\sin\varphi_0 . \qquad (1.13)$$

Решим полученную систему уравнений относительно A и φ_0. Для этого разделим обе части уравнения (1.13) на ω. Затем возведем оба уравнения в квадрат и сложим левые и правые части:

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0) = A^2 .$$

Подстановка значений x_0, v_{x0} и ω дает $A = 1$ см.

Значение начальной фазы φ_0 найдем, используя уравнения (1.12) и (1.13). Из уравнения (1.12) получим: $\varphi_0 = \pm \arccos\frac{x_0}{A} = \pm\frac{\pi}{3}$. Для того чтобы выбрать знак начальной фазы, воспользуемся уравнением (1.13). По условию $v_{x0} > 0$, поэтому уравнению (1.13) удовлетворяет только значение начальной фазы $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $A = 1$ см, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Пример 1.3

Точка совершает гармонические колебания по синусоидальному закону вдоль оси X, и в некоторый момент времени τ имеет следующие значения смещения, скорости и ускорения: $x(\tau) = 10^{-1}$ м; $v_x(\tau) = -0{,}7$ м/с; $a_x(\tau) = -0{,}16$ м/с^2. Нужно:

1) найти амплитуду смещения, период колебаний точки, фазу колебаний в момент времени τ, максимальную скорость и максимальное ускорение точки;

2) определить начальную фазу и момент времени τ, если известно, что в начальный момент времени смещение точки равно $x(0) = \sqrt{2}\cdot 10^{-1}$ м, а $v_x(0) > 0$;

3) нарисовать графики зависимостей смещения и скорости точки от времени.

Решение

Движение точки по условию описывается уравнением:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1.14)$$

Тогда скорость и ускорение точки будут равны:

$$\mathrm{v}_x(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0); \qquad (1.15)$$

$$a_x(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1.16)$$

Разделим уравнение (1.16) на (1.14), получим: $\omega^2 = -\dfrac{a_x(t)}{x(t)}$.

Таким образом, отношение ускорения к смещению точки в один и то же момент времени, взятое с обратным знаком, дает значение квадрата циклической частоты.

Следовательно, $\omega = \sqrt{\dfrac{-a(\tau)}{x(\tau)}} = 4\ \text{с}^{-1}$. Используя соотношение (1.2), найдем период колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1{,}57\ \text{с}$.

Значение амплитуды A найдем, решая совместно уравнения (1.14) и (1.15), записанные для момента времени τ.

Для этого из этих уравнений нужно выразить отдельно $\sin(\omega\tau + \varphi_0)$ и $\cos(\omega\tau + \varphi_0)$, возвести полученные выражения в квадрат, а затем сложить. В результате получим:

$$\frac{\mathrm{v}_x^2(\tau)}{A^2\omega^2} + \frac{x^2(\tau)}{A^2} = 1.$$

Следовательно, $A = \sqrt{x^2(\tau) - \dfrac{x(\tau)\mathrm{v}_x^2(\tau)}{a_x(\tau)}} = 0{,}2\ \text{м}$. Здесь учтено, что $\omega^2 = -\dfrac{a_x(\tau)}{x(\tau)}$.

Из уравнений (1.14) и (1.15) также следует, что максимальные скорость и ускорение точки равны:

$$\mathrm{v}_{x\max} = A\omega = 0{,}8\ \text{м/с}, \quad a_{x\max} = A\omega^2 = 3{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Фазу колебаний $\Phi = \omega\tau + \varphi_0$ в момент времени τ найдем, используя уравнение (1.14): $x(\tau) = A\sin(\omega\tau + \varphi_0)$:

$$\Phi = \omega\tau + \varphi_0 = \arcsin\frac{x(\tau)}{A} = \arcsin\frac{1}{2}$$

Полученному уравнению удовлетворяют два значения фазы:

$$\Phi_1 = \pi/6 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = 5\pi/6.$$

Из этих значений нужно выбрать одно, которое удовлетворяло бы уравнению (1.15): $v_x(\tau) = A\omega\cos(\omega\tau + \varphi_0)$.

По условию скорость точки в момент времени τ меньше нуля, и, следовательно, подходит только значение фазы $\Phi_2 = 5\pi/6$.

Значение начальной фазы φ_0 определим из условия:

$$x(0) = \sqrt{2}\cdot 10^{-1} \text{ м}.$$

Тогда $x(0) = A\sin\varphi_0$ и $\varphi_0 = \arcsin\frac{x(0)}{A} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Этому уравнению удовлетворяют два значения фазы:

$$\varphi_{01} = \pi/4 \quad \text{и} \quad \varphi_{02} = 3\pi/4.$$

По условию скорость точки в момент времени $\tau = 0$ больше нуля $[v(0) = A\omega\cos\varphi_0 > 0]$, и, следовательно, подходит только значение фазы $\varphi_{01} = \pi/4$.

Определив значение начальной фазы φ_0, из соотношения $\Phi = \omega\tau + \varphi_0$ легко найти время τ:

$$\tau = \frac{\Phi - \varphi_0}{\omega} = \frac{7\pi}{48} = 0{,}46 \text{ с}.$$

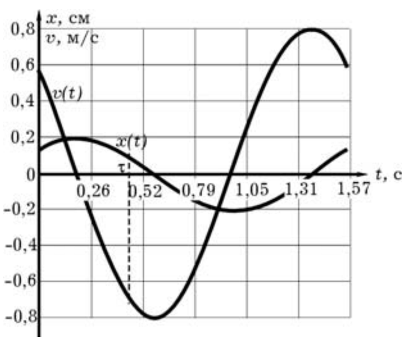


Рис. 1.2

Используя полученные значения амплитуд смещения и скорости, значения периода и начальной фазы колебаний, можно построить графики зависимости смещения точки $x(t)$ и ее скорости $v(t)$ от времени t, которые представлены на рис. 1.2.

Значения характеристик гармонического колебания можно найти, используя графики колебаний. Задания этого типа часто используют на ЕГЭ. Далее рассмотрен пример такого задания.

Пример 1.4

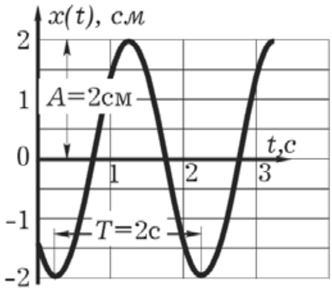


Рис. 1.3

На рис. 1.3 приведен график зависимости смещения материальной точки от времени. Нужно:

1) найти период, амплитуду и циклическую частоту этого гармонического колебания;

2) найти начальную фазу этого колебания в случаях, если а) $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$; б) $x(t) = A\cos(\omega t + = \varphi_0)$;

3) записать уравнения полученных зависимостей.

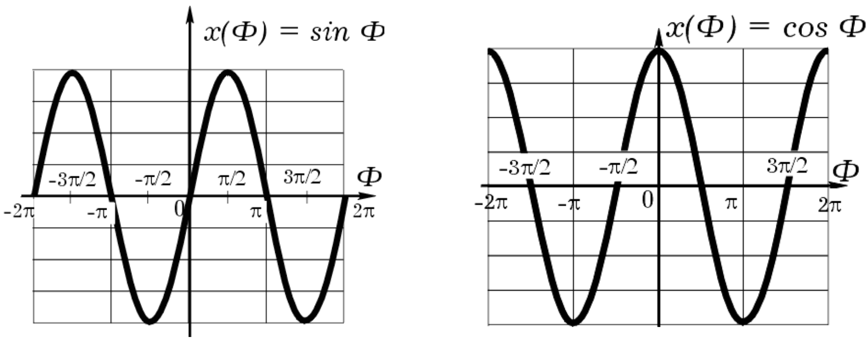
Значение амплитуды из графика найдем как отклонение точки от нуля до максимального значения: $A = 2$ см.

Значение периода колебаний найдем как отрезок времени между двумя соседними максимумами: $T = 2$ с.

Циклическую частоту вычислим из соотношения

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \text{с}^{-1}.$$

Значения начальных фаз φ_0 можно найти следующим способом.



а) б)

Рис. 1.4

На рис. 1.4 представлены графики гармонических колебаний как функции смещения материальной точки от фазы: в двух случаях: а) $x(Ф) = \sinФ$; б) $x(Ф) = \cos(Ф)$.

Из графиков видно, что случае $x(\Phi) = \sin\Phi$ нулевое значение фазы приходится на центр возрастающей части синусоиды. В случае $x(\Phi) = \cos(\Phi)$ нулевое значение фазы совпадает с максимумом $x(\Phi)$.

Эти расположения шкал фаз в двух приведенных случаях нужно запомнить. Для того чтобы определить значение начальной фазы φ_0 на заданном графике, нужно мысленно начало шкалы фаз перенести в соответствующее место на графике. В задаче в случае, когда смещение точки нужно представить в виде синусоиды $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, перенесем начало шкалы фаз, как указано на рис. 1.5. Тогда пересечение оси $x(t)$ со шкалой фаз и даст значение начальной фазы, равное $\varphi_0 = -3\pi/4$. Таким образом, в этом случае уравнение колебаний примет вид

$$x(t) = 2\sin(\pi t - 3\pi/4).$$

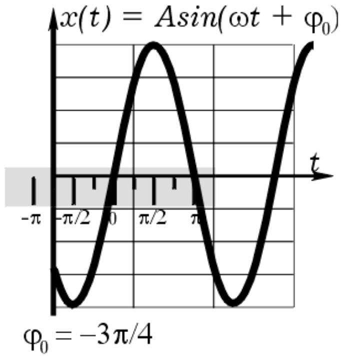


Рис. 1.5

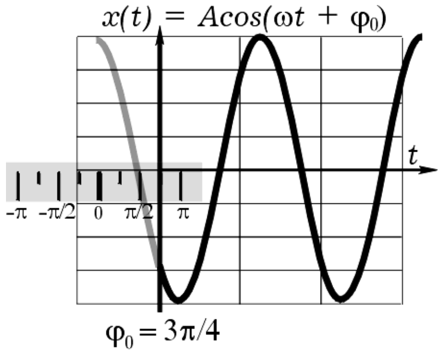


Рис. 1.6

В случае, когда смещение точки нужно представить в виде косинусоиды $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, перенесем начало шкалы фаз, как указано на рис. 1.6. Тогда пересечение оси $x(t)$ со шкалой фаз и даст значение начальной фазы, равное $\varphi_0 = 3\pi/4$.

Таким образом, в этом случае уравнение колебаний примет вид

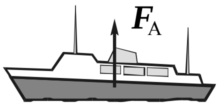
$$x(t) = 2\cos(\pi t + 3\pi/4).$$

Значения начальных фаз должны лежать в пределах $(-\pi \le \varphi_0 \le \pi)$, *поэтому длина шкалы фаз должна быть ограничена этими размерами.*

Рассмотрим еще несколько типичных примеров.

Пример 1.5

Корабль в стоячей воде совершает вертикальные колебания с периодом T = 2 с. Оцените массу корабля M, если площадь его сечения S по ватерлинии равна 300 м^2. Плотность воды ρ принять равной 10^3 кг/м^3.



Решение

При погружении корабля на глубину x от положения равновесия на него начинает действовать дополнительная выталкивающая сила Архимеда $\mathbf{F}_{\text{А}}$ (см. рисунок), равная весу воды, вытесненной кораблем при этом погружении:

$$F_{\text{А}} = m_{\text{в}} g = \underbrace{\rho V}_{m_{\text{в}}} g = -\rho \underbrace{Sx}_{V} g\ .$$

Появление знака минуса связано с тем, что направление силы $\mathbf{F}_{\text{А}}$ и направление смещения x направлены в разные стороны. Эта сила по второму закону Ньютона будет придавать кораблю ускорение, равное: $a_x = \ddot{x} = \dfrac{F_{\text{А}}}{M} = -\dfrac{\rho S g}{M} x$. Таким образом, получили дифференциальное уравнение типа (1.6). Следовательно, корабль будет совершать гармонические колебания. При этом квадрат циклической частоты ω^2 равен коэффициенту при x. $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{\rho S g}{M}$. Из этого равенства можно вычислить массу корабля M.

$$M = \frac{\rho S g T^2}{4^2 \pi^2} = \frac{10^3 \cdot 300 \cdot 9,8 \cdot 4}{4 \cdot 9,87} \cong 300 \text{ т}\ .$$

Пример 1.6

Имеется идеально плоский, гладкий стол. Стол расположен горизонтально, так что нормаль к поверхности стола, проведенная из ее центра, направлена точно к центру Земли. На край стола на расстоянии от центра l = 2 м кладут шарик (рис. 1.7). Показать, что в отсутствии трения шарик начнет совершать гармонические колебания. Найти:

1) период колебаний;

2) максимальную скорость шарика;

3) средний модуль скорости движения шарика (путевую скорость).

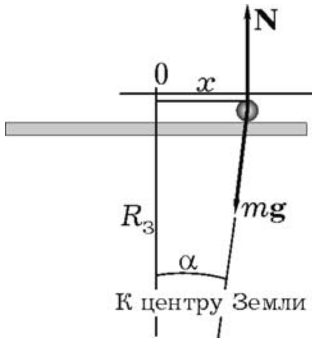


Рис. 1.7

Систему отсчета, связанную со столом, считать инерциальной.

Решение

При отклонении шарика от центра стола на него действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная к центру Земли, и сила реакции поверхности стола $\mathbf{N}$. Второй закон Ньютона для шарика имеет вид $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$. Спроецируем это уравнение на ось X.

Получим: $ma = -mg \cdot \sin\alpha$ или $\ddot{x} = -\dfrac{gx}{R_з}$. В этом выражении α – угол между нормалью к плоскости стола и направлением силы $m\mathbf{g}$. Синус этого угла равен отношению x к радиусу Земли $R_з$. Таким образом, получили дифференциальное уравнение вида (1.6). Следовательно, шарик будет совершать гармонические колебания около положения равновесия с амплитудой $A = l$. Квадрат круговой частоты ω^2 этих колебаний равен коэффициенту при x. Поэтому

$\omega^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{g}{R_з}$. Из этого уравнения можно вычислить период T этих колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_з}{g}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{64 \cdot 10^5}{9{,}81}} = 5072\ \text{с} \cong 84\ \text{мин}.$$

Можно заметить, что значение этого периода совпадает со значением периода обращения спутника Земли, вращающегося на небольшой высоте ($h \ll R_з$).

Максимальная скорость шарика определяется из уравнения (1.4): $v_{max} = A\omega = 2\pi l/T = 2{,}5$ мм/с.

Средний модуль скорости движения шарика найдем из определения: $\langle|\mathbf{v}|\rangle = \dfrac{\text{Путь}}{\text{Время}} = \dfrac{4l}{T} = 1{,}6$ мм/с.

Пример 1.7

На горизонтальном столе находится грузик массой m, скрепленный с пружиной жесткостью k. Коэффициент трения между поверхностью стола и грузиком равен μ. В начальном положении пружина не растянута. Пружину с грузиком растянули на величину L и отпустили. Считая модуль силы трения независящим от скорости движения грузика, описать движение грузика.

Решение

На грузик действуют следующие силы (рис. 1.8): mg – сила тяжести; $N = mg$ – реакция поверхности стола, равная по модулю силе тяжести; $F_x = -kx$ – сила упругости пружины, определяемая законом Гука; $F_{тр} = \mu mg$ – сила трения, которая не меняет значения по модулю, но меняет свой знак при смене направления движения.

На рисунке обозначены модули действующих сил и их направления.

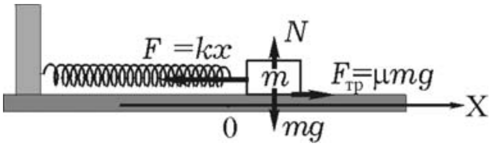


Рис. 1.8

Начало отсчета выберем в точке, где находится конец нерастянутой пружины (см. рис. 1.8).

Поскольку на грузик действуют постоянная и квазиупругая силы, то грузик будет совершать гармонические колебания *около положения равновесия* с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (см. пример 1.1). Однако, в отличие от свободного движения грузика, на пружине в данном случае сила трения будет постоянной только в течение одного полупериода, когда грузик движется только в одном направлении. При смене направления движения грузика сила трения также изменит свое направление на противоположное. Это приведет к тому, что при движении грузика, например, вправо положение равновесия, определяемое координатой x_0, будет слева от начала отсчета, а при движении грузика влево – справа от начала отсчета.

В положении равновесия сумма сил равна нулю, и, следовательно: $|x_0| = \dfrac{\mu m g}{k}$.

По условию грузик был оттянут на расстояние L, а положение равновесия определяется координатой $+x_0$ (см. рис. 1.8). Тогда при движении грузика налево амплитуда колебания будет равна $(L - x_0)$. Следовательно, в первом полупериоде движения грузика будет описываться уравнением:

$$x(t) = (L - x_0)\cos(\omega t)\,, \qquad (1.17)$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – циклическая частота колебаний; $x_0 = \dfrac{\mu m g}{k}$.

Значение начальной фазы φ_0 равно нулю, так как начало отсчета времени совпадает с моментом, когда отклонение грузика максимально.

Это уравнение движения справедливо в течение первой половины периода $\dfrac{T}{2}$, а затем направление силы трения меняет знак.

Это приведет к тому, что в течение следующей половины периода положение равновесия сместится в точку ($-x_0$) и амплитуда следующего колебания в течение полупериода станет равной $(L-3x_0)$. Следовательно, в течение следующего полупериода движение грузика описывается уравнением:

$$x_1(t)=(L-3x_0)\cos(\omega t)\,. \tag{1.18}$$

В следующий полупериод движение грузика опять будет описываться этим же уравнением с той лишь разницей, что амплитуда будет равна $A=(L-5x_0)$.

Все уравнения можно объединить в одно:

$$x(t)=\left(L-(2N+1)x_0\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \tag{1.19}$$

где $N=0,1,2,\ldots,E\left(\dfrac{t}{T/2}\right)$ – целая часть числа $\dfrac{t}{T/2}$.

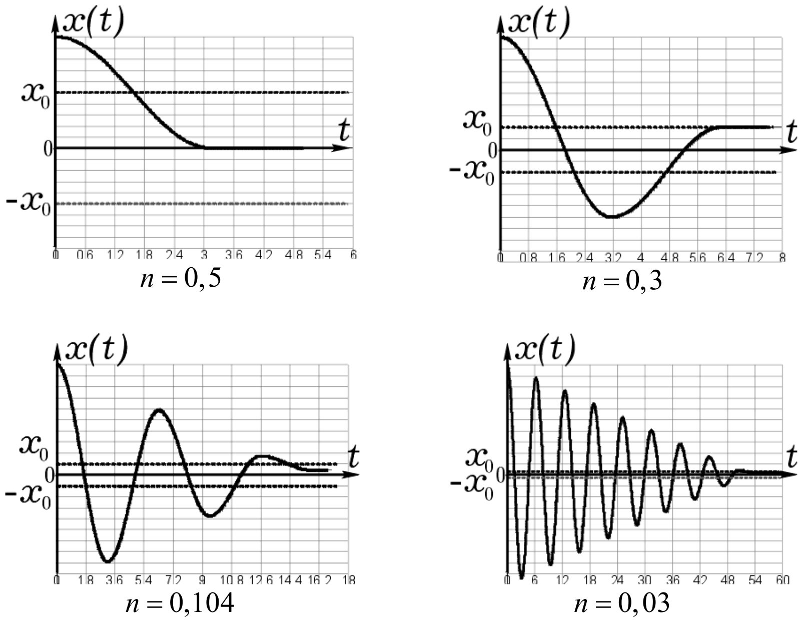


Рис. 1.9

Движение грузика будет продолжаться до тех пор, пока значение $x(t)$ в моменты остановки грузика не станет меньшим, чем $\dfrac{F}{k}$. Это означает, что в момент остановки сила упругости пружины будет меньше, чем сила трения.

На рис. 1.9 приведены графики движения грузика для различных сил трения при одинаковых начальных условиях. Коэффициент n равен отношению силы трения μmg к силе упругости пружины kL в начальный момент времени. Горизонтальные пунктирные линии указывают значения x_0. Проследите, как каждый полупериод колебаний происходит около своего положения равновесия: либо $+x_0$, либо $-x_0$.

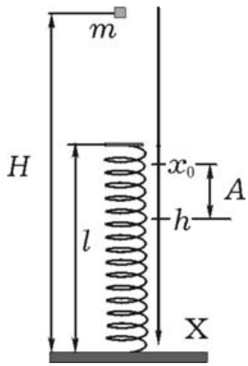


Рис. 1.10

Пример 1.8

Груз массой m падает с высоты H на пружину жесткостью k и длиной l, нижний конец которой закреплен на полу. При сжатии пружины более чем на $l/2$ она теряет свои упругие свойства. Массой пружины пренебречь.

Найти:

1) максимальную высоту H_{max}, при которой груз будет совершать гармоническое колебание;

2) время контакта груза с пружиной, если выполняется условие $H < H_{max}$.

Решение

Максимальную высоту H_{max} найдем, записав закон сохранения полной механической энергии дли системы груз – пружина. В данном случае полная механическая энергия будет сохраняться, поскольку в системе груз – пружина по условию отсутствует трение. Пусть нулевой уровень потенциальной энергии соответствует уровню пола. В начальном состоянии энергия системы будет равна потенциальной энергии груза на высоте H. Конечным состоянием системы будем считать состояние, когда груз максимально опустится и его скорость станет равной нулю. Тогда энергия системы будет равна сумме потенциальных энергий груза и пружины.

1. Гармонические колебания возникают в случае, когда в системе действует только квазиупругая сила. По условию пружина сохраняет свои упругие свойства при максимальном сжатии, равным $l/2$. Тогда закон сохранения полной механической энергии примет вид (рис. 1.10):

$$mgH_{\max} = mg\frac{l}{2} + \frac{k(l/2)^2}{2}.$$

Отсюда следует, что $H_{\max} = \frac{l}{2} + \frac{kl^2}{8mg}$.

2. Так как груз движется под действием силы упругости пружины и постоянной силы mg, то он будет совершать гармоническое колебание с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ около некоторого положения равновесия x_0.

Направим ось X вертикально вниз, а начало отсчета выберем в точке, где находится конец несжатой пружины (см. рис. 1.10). Тогда положение равновесия найдем из условия: $mg = kx_0$, или $x_0 = \frac{mg}{k}$.

Найдем максимальное сжатие пружины h, если груз падает с высоты $H < H_{\max}$. Для этого опять воспользуемся законом сохранения полной механической энергии:

$$mgH = mg(l - h) + \frac{k(h)^2}{2}.$$

Решая это квадратное уравнение относительно h, получим:

$$h = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2(H - l)k}{mg}}.$$

Тогда амплитуда колебания будет равна разности между максимальным сжатием пружины h и положением равновесия x_0:

$$A = h - x_0 = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2(H - l)k}{mg}}.$$

Таким образом, за время контакта с пружиной тело будет совершать гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и амплитудой A. Исходя из этого, вычислим время контакта груза с пружиной. Непосредственно после контакта груз будет двигаться до положения равновесия x_0 время τ_1, которое вычислим отдельно. Затем груз будет двигаться от положения равновесия до максимального смещения и обратно за время τ_2, равное половине периода: $\tau_2 = \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Потом груз поднимется на величину x_0, очевидно, за время τ_1 и затем оторвется от пружины.

Таким образом, нужно вычислить время движения груза τ_1, за которое он пройдет расстояние x_0 от положения равновесия при амплитуде колебаний, равной A. Время τ_1 найдем из равенства:

$$x_0 = A\sin \omega\tau_1,$$

т.е.

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x_0}{A} = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2(H-l)k}{mg}}} = \frac{1}{\omega}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{mg}{2(H-l)k}}.$$

Итак, время контакта пружины с грузом равно:

$$t = \tau_2 + 2\tau_1 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\pi + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{mg}{2(H-l)k}}\right).$$

Задачи

1^A. Крылья пчелы колеблются с частотой n = 240 Гц. Сколько взмахов крыльями сделает пчела, пока долетит до цветочного поля, расположенного на расстоянии s = 500 м, если она летит со скоростью v = 4 м/с?

Ответ. N = 30000.

2^A. За 1 с комар совершает 600 взмахов крыльями, а период колебаний крыльев шмеля 5 мс. Какое из насекомых и на сколько сделает при полете большее количество взмахов за 1 мин?

Ответ. Комар делает больше на 24000 взмахов.

3^A. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону: $x(t) = 0{,}2\sin\left(4\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Найти амплитуду, период, частоту, циклическую частоту, начальную фазу колебаний, смещение точки в начальный момент времени.

Ответ. $A = 0{,}2$ м; $T = 0{,}5$с; $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$, $\varphi_0 = -\pi/4$; $x(0) = -0{,}14$ м.

4^A. Найти амплитуду, период, частоту и начальную фазу колебаний, если закон колебаний материальной точки имеет вид $x = 5\cos 6{,}28t$ [см].

Ответ. $A = 5$ см; $T = 1$ с; $\nu = 1$ Гц, $\varphi_0 = 0$.

5^A. Написать уравнение гармонических колебаний, если частота $\nu = 0{,}5$ Гц, амплитуда $A = 80$ см. Начальное смещение $x(0) = 0$. Рассмотреть два случая: а) колебания совершаются по синусоидальному закону; б) колебания совершаются по косинусоидальному закону.

Ответ. $x(t) = 0{,}8\sin(\pi t)$ [м], $x(t) = 0{,}8\cos(\pi t - \pi/2)$ [м].

6^A. Через какую долю периода отклонение точки от положения равновесия при гармонических колебаниях будет равно половине амплитуды?

Ответ. $t = \dfrac{T}{12}$.

7^B. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 3$ см. Определить скорость точки в момент времени, когда смещение $x = 1{,}5$ см.

Ответ. $\text{v} = 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}$.

8^B. Период гармонических колебаний $T = 4$ с. Определить время t_1, за которое тело, совершающее эти колебания, пройдет путь, равный половине амплитуды, если в начальный момент времени тело проходило положение равновесия; t_2 – путь, равный амплитуде; t_3 – путь, равный 2/3 амплитуды.

Ответ. $t_1 = T/12 = 1/3$ с; $t_2 = T/4 = 1$ с; $t_3 = 5T/12 = 5/3$ с.

9^B. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону косинуса с начальной фазой $\varphi_0 = -\pi$, амплитудой $A = 6$ см и циклической частотой $\omega_0 = 3\pi$. Найти: а) смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени; б) скорость точки в начальный момент времени.

Ответ. $x(0) = -6$ см; $\text{v}(0) = 0$.

10^B. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины? В начальный момент времени точка проходит положение равновесия.

Ответ. В 2 раза.

11^B. Написать закон гармонического колебания точки, если максимальное ускорение ее $a_{\max} = 49{,}3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 2{,}5$ см. Колебания совершаются по закону синуса.

Ответ. $x = 5\sin(\pi t + \pi/6)$ [см].

12^B. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости? В начальный момент времени точка проходит положение равновесия.

Ответ. $t = T/6$.

13^B. Платформа совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости с частотой $\nu = 2$ Гц и амплитудой $A = 1$ см. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу $\mu = 0{,}2$. Будет ли груз скользить по платформе? Ответ обосновать.

Ответ. Не будет, так как максимальное ускорение, которое способна сообщить сила трения μg будет больше максимального ускорения в данных гармонических колебаниях, т.е. $a_{\max} = A(2\pi\nu)^2$.

14^C. На платформе, совершающей гармонические колебания в вертикальной плоскости с амплитудой A и периодом T, находится небольшое тело массой m. Определить максимальное значение силы давления тела на платформу. Найти условие, при котором тело в процессе колебаний не отрывается от платформы.

Указание: при движении тела вверх после прохождения положения равновесия ускорение точки направлено вниз Это ускорение сообщается результирующей сил тяжести и нормального давления. Поэтому модуль этого ускорения не может превышать g. Отсюда следует, что максимальное ускорение $A\omega^2$ тела в данном случае должно быть меньше g.

Ответ. $F = m\left(\dfrac{4\pi^2 A}{T^2} + g\right)$. Тело не отрывается, если $\dfrac{4\pi^2 A}{T^2} < g$.

15^C. По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v скользит тонкий однородный брусок длиной l. Брусок наезжает на обширный шероховатый участок плоскости. Через какое время брусок остановится, если коэффициент трения равен μ, а скорость бруска такова, что он не полностью наезжает на поверхность?

Указание: показать, что сила трения пропорциональна координате x конца бруска, и, следовательно, движение бруска будет описываться гармоническим законом.

Ответ. $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.

16^C. Пуля массой *m,* летящая со скоростью *v*, попадает в тело массой *m*, связанное со стенкой пружиной жесткости *k,* и застревает в нем (рис. 1.11). Выбрав момент попадания пули за начало отсчета времени, найдите зависимость координаты и скорости тела от времени. Трением между горизонтальной поверхностью и телом пренебречь.

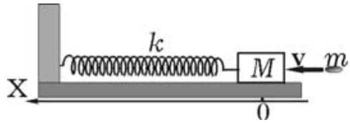


Рис. 1.11

Указание: записать законы сохранения импульса системы пуля – тело и полной механической энергии системы тело с пулей – пружина.

Ответ. $x(t) = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}\cdot t\right)$;

$\mathrm{v}(t) = \frac{m\mathrm{v}}{m+M}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}\cdot t\right)$.

17^C. На тело, связанное со стенкой пружиной и находящееся в равновесии, начала действовать вдоль пружины постоянная сила *F*. Чему равно наибольшее значение силы натяжения пружины $F_{\text{нат}}$ и через какое время τ после начала действия на тело силы *F* оно достигается? Период свободных колебаний тела *T*.

Указание: записать закон сохранения полной механической энергии.

Ответ. $F_{\text{нат}} = 2F$, $\tau = 2T$.

18*. На горизонтальную ленту транспортера, движущуюся со скоростью *U,* опускают груз массой *m,* связанный пружиной жесткости *k* с неподвижной стенкой (рис. 1.12). В начальный момент пружина не деформирована. Коэффициент трения груза о поверхность ленты равен μ. При какой скорости ленты движение груза будет гармоническим колебанием? Как зависит амплитуда установившихся колебаний от скорости ленты *U*?

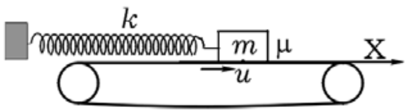


Рис. 1.12

Указание: а) скорость ленты U должна быть больше, чем Aω (если скорость ленты мала, то положение равновесия тело будет проходить с <u>постоянной</u> скоростью U); б) воспользоваться тем, что приращение полной механической энергии равно работе сил трения.

Ответ. При скорости ленты $U \geq \mu g\sqrt{m/k}$ сразу начнутся гармонические колебания с амплитудой $A = \mu mg/k$. При меньших скоростях ленты установятся не гармонические колебания с амплитудой $A = U\sqrt{m/k}$.

19*. На горизонтальной плоскости лежит тело массой m, связанное пружиной жесткости k с неподвижной стенкой. Тело оттянули на расстояние l от положения равновесия и отпустили. Совершив n колебаний, тело остановилось. Чему равен коэффициент трения между телом и плоскостью, если после остановки тела пружина оказалась недеформированной?

Ответ. $\mu = kl / 4mgn$.

Указание: см. пример 1.7.

20^C. Тело массой m, подвешенное на пружине жесткостью k, лежит на подставке (рис. 1.13). Подставку мгновенно убирают. Записать уравнения движения тела вдоль вертикальной оси Y, если первоначально: а) пружина не деформирована; б) пружина сжата на величину l. Считать, что при $t = 0$, $y(0) = 0$.

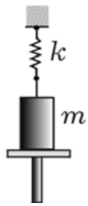


Рис. 1.13

Указание: записать закон сохранения полной механической энергии.

Ответ. а) $y(t) = \dfrac{mg}{k}(\cos\omega t - 1)$;

б) $y(t) = \left(\dfrac{mg}{k} + l\right)(\cos\omega t - 1)$.

21^B. Небольшое тело может скользить без трения по внутренней части цилиндрической поверхности желоба радиусом R (рис. 1.14). Образующая цилиндрической поверхности расположена горизонтально. Найти период малых колебаний при выведении тела из положения равновесия.

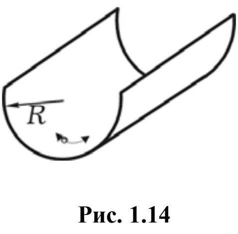


Рис. 1.14

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

22[B]**.** Небольшое тело может скользить без трения по внутренней части цилиндрической поверхности желоба радиусом R и длиной l. Телу сообщили горизонтальную скорость **v** вдоль образующей цилиндра, не совпадающую с образующей QN (рис. 1.15). Сколько раз тело пересечет нижнюю образующую желоба QN?

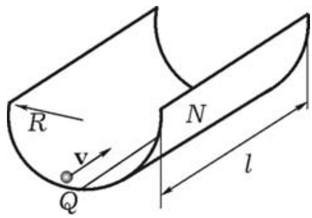


Рис. 1.15

Ответ. Число пересечений равно целой части величины $\dfrac{l\sqrt{g}}{v\pi\sqrt{R}}$.

§ 2. Энергия гармонического осциллятора

Система, совершающая гармонические колебания, называется *гармоническим осциллятором* от английского слова oscillation – колебание.

Гармонический осциллятор, совершающий колебания, обладает энергией. Выведем выражение для энергии механического осциллятора, хотя полученный результат будет носить черты общего характера.

Механическая энергия гармонического осциллятора складывается из кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} .$$

Кинетическая энергия грузика массой m, совершающего гармонические колебания вдоль оси X, равна:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right] . \quad (2.1)$$

Кинетическая энергия периодически изменяется от 0 до $\dfrac{mA^2\omega^2}{2}$, совершая гармонические колебания с частотой 2ω.

Потенциальная энергия грузика $E_{пот}$, совершающего гармонические колебания вдоль оси X под действием квазиупругой силы $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$, равна $\frac{kx^2}{2}$. Используя уравнение (1.3), получим:

$$E_{пот} = \frac{kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2}{4}\left[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right]. \qquad (2.2)$$

Потенциальная энергия гармонического осциллятора периодически меняется от 0 до $\frac{kA^2}{2}$ с частотой 2ω.

Принимая во внимание, что $k = m\omega^2$ (1.10), получим выражение для полной энергии гармонического осциллятора:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \qquad (2.3)$$

Тот факт, что энергия гармонического осциллятора в нашем случае пропорциональна квадрату амплитуды A^2 и квадрату частоты ω^2, носит общий характер для любого гармонического осциллятора.

Таким образом, полная энергия осциллятора не зависит от фазы колебаний, а определяется только амплитудой и параметрами системы.

Внутри механической системы энергия переходит из одного вида в другой: кинетическая энергия в потенциальную и обратно. В положении равновесия вся энергия осциллятора равна максимальной кинетической энергии, а в крайнем положении – максимальной потенциальной энергии.

Пример 2.1

Тело массой m = 5 кг совершает гармонические колебания. Полная энергия гармонических колебаний E = 100 мДж, а максимальная сила, действующая на тело, F_{max} = 10 Н. Найти амплитуду A колебаний тела и циклическую частоту ω.

Решение

Полная энергия гармонических колебаний связана с массой тела m, амплитудой колебаний A и циклической частотой выражением (2.3):

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \tag{2.4}$$

Связь максимальной силы и максимального ускорения определяется вторым законом Ньютона:

$$F_{max} = ma_{max}. \tag{2.5}$$

Максимальное ускорение при гармонических колебаниях равно:

$$a_{max} = A\omega^2. \tag{2.6}$$

Решая совместно уравнения (2.4) – (2.6), получим:

$$A = \frac{2E}{F_{max}} = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{м}; \quad \omega = \sqrt{\frac{2E}{mA^2}} = 10\ \text{с}^{-1}.$$

Задачи

2.1*В*. Материальная точка совершает колебания по закону $x(t)$ = = 0,2 cos ($15\pi t + \pi$). Считая, что масса точки m = 0,1 кг, найти силу, действующую на нее при t = 1 с, а также кинетическую и потенциальную энергии в этот момент времени. Чему равна полная энергия тела?

Ответ. $F = -m\omega^2 x = -45$ Н; $E_{кин} = 0$;

$$E_{пот} = E_{полн} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = 4{,}5\ \text{Дж}.$$

2.2*В*. Движение тела массой m = 2 кг описывается законом x = = 0,8 sin ($\pi t + \pi/2$). Определить энергию колеблющегося тела и максимальную силу, действующую на него.

Ответ. $E = \dfrac{mA^2\omega^2}{2}$ = 6,32 Дж; $F_{max} = m\omega^2 A$ = 15,8 Н.

2.3*В*. Точка совершает гармонические колебания по закону x = = 5sin ($2t$). Найти момент времени, когда возвращающая сила впервые достигла значения $F = 5 \cdot 10^{-3}$ Н, а потенциальная энергия стала $E_{пот} = 6 \cdot 10^{-3}$ Дж. Начальный момент времени считать равным нулю.

Ответ. $t = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2E_{пот}}{5F} = 0{,}25\ \text{с}$.

2.4*С*. Материальная точка массой m совершает гармонические колебания. На расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия скорости точки равны v_1 и v_2 соответственно. Найти амплитуду, циклическую частоту и полную энергию колебаний точки.

Ответ. $A = \sqrt{\dfrac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$; $E = \dfrac{m}{2} \dfrac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}$.

2.5^C. Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания по синусоидальному закону, E = 30 мкДж; максимальная сила, действующая на тело, F = 1,5 мН. Написать закон движения этого тела, если период колебания T = 2 с и начальная фаза φ_0 = = $\pi/3$.

Ответ. $x = \dfrac{2E}{F}\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0{,}04\sin\pi\left(t + \dfrac{1}{3}\right)$.

§ 3. Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка массой m, подвешенная на нерастяжимой, невесомой нити длиной l.

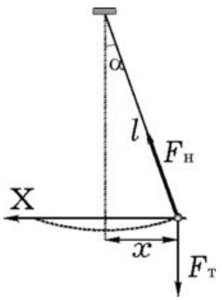


Рис. 3.1

Рассмотрим, какое движение будет совершать математический маятник при его отклонении от положения равновесия на малый угол α (рис. 3.1).

На материальную точку действуют две силы: сила натяжения нити $\mathbf{F}_н$ и сила тяжести $\mathbf{F}_т$. Запишем для нее второй закон Ньютона: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_н + \mathbf{F}_т$.

Спроецируем это векторное равенство на ось, перпендикулярную к направлению силы $\mathbf{F}_н$, т.е. на касательную к траектории движения материальной точки:

$$ma_\tau = F_т \sin\alpha.$$

С учетом того, что для малых (α < 0,1 радиана) углов с точностью лучше одного процента $\sin\alpha \cong \alpha = \dfrac{x}{l}$, получим: $a_\tau \cong \ddot{x} = -\dfrac{F_т}{m}\dfrac{x}{l}$. Это равенство выполняется тем точнее, чем меньше угол α.

Знак «–»» означает, что смещение x и ускорение $\ddot{x}$ направлены в разные стороны.

Итак, получили:

$$\ddot{x} + \frac{F_{\text{т}}}{m}\frac{x}{l} = 0\,. \tag{3.1}$$

Это уравнение вида (1.6), из которого следует, что смещение x точки от положения равновесия изменяется по гармоническому закону:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

В этом выражении $A = x_{\max}$ – максимальное отклонение (амплитуда колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний; ω – циклическая частота колебаний, равная корню квадратному из коэффициента при x уравнении (3.1), т.е.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{F_{\text{т}}}{ml}}\,. \tag{3.2}$$

Из этого равенства можно определить период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F_{\text{т}}}}\,. \tag{3.3}$$

Сила тяжести определяется как произведение массы на ускорение свободного падения. Если математический маятник совершает колебания вблизи поверхности Земли в инерциальной системе отсчета, то $F_{\text{т}} = mg$, где $g = 9{,}8$ м/с^2.

Тогда циклическая частота ω и период колебаний T математического маятника будут равны, соответственно:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{3.4}$$

Амплитуда колебаний A и начальная фаза φ_0 определяются начальными условиями, т.е. начальным отклонением и выбором начала отсчета времени t.

Если математический маятник совершает колебания вблизи поверхности Земли в неинерциальной системе отсчета, то сила тяжести будет равна векторной сумме силы $m\mathbf{g}$ и силе инерции, которая равна $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчета относительно Земли.

Пример 3.1

Лифт движется с постоянным ускорением **a**. В лифте находится математический маятник длиной l. Найти период колебаний маятника, если ускорение лифта направлено: а) вверх, б) вниз.

Решение

а) Если ускорение лифта направлено вверх, то модуль силы тяжести

$$\left|\mathbf{F}_{\text{т}}\right| = \left|m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{ин}}\right| = \left|m(\mathbf{g} - \mathbf{a})\right| = m(g + a).$$

Тогда $\omega = \sqrt{\dfrac{g+a}{l}}$; $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$.

б) Если ускорение лифта направлено вниз, модуль силы тяжести

$$\left|\mathbf{F}_{\text{т}}\right| = \left|m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{ин}}\right| = \left|m(\mathbf{g} - \mathbf{a})\right| = m(g - a).$$

Тогда $\omega = \sqrt{\dfrac{g-a}{l}}$; $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$.

Получим выражение для потенциальной и кинетической энергий математического маятника.

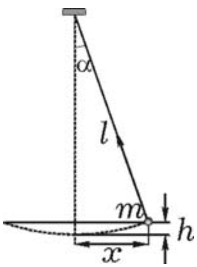


Рис. 3.2

Отклонение математического маятника от положения равновесия (рис. 3.2) будет определяться выражением $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Выберем начало отсчета времени таким, чтобы начальная фаза φ_0 стала равной нулю. Это означает, что в момент времени $t = 0$ отклонение математического маятника максимально и равно амплитуде A. Тогда $x(t) = A\cos(\omega t)$, а скорость материальной точки m будет изменяться по закону: $\mathrm{v}(t) = -A\omega\sin(\omega t)$.

Если принять значение потенциальной энергии математического маятника $E_{\text{пот}}$ в положении равновесия равным нулю, то $E_{\text{пот}} = mgh$ (см. рис. 3.2). Как видно из рисунка,

$$h = (l - l\cos\alpha) = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2\alpha/2.$$

С учетом того, что $\sin^2\alpha/2 \cong \dfrac{x^2}{4l^2}$, получим:

$$E_{\text{пот}} = mgh = mg\,2l\sin^2\alpha/2 = \frac{mgx^2}{2l} = \frac{m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t)}{2}. \qquad (3.5)$$

Кинетическая энергия математического маятника будет равна:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\sin^2(\omega t)}{2}. \qquad (3.6)$$

Полная механическая энергия ($E_{\text{пот}}$ + $E_{\text{кин}}$), как и следовало ожидать, будет равна $E_{\text{полн}} = \dfrac{mA^2\omega^2}{2}$. Это выражение совпадает с полученным ранее выражением для полной механической энергии пружинного маятника.

Пример 3.2

Математический маятник, отведенный на угол α от вертикали, проходит положение равновесия со скоростью *v*. Колебания происходят по закону $x(t) = A\cos(\omega t)$. Потенциальную энергию маятника в положении равновесия считать равной нулю.

Найти:

а) период и амплитуду собственных колебаний маятника;

б) через какие промежутки времени τ от начала движения, кинетическая энергия маятника будет равна потенциальной.

Решение

а) В положении равновесия полная механическая энергия маятника равна кинетической энергии: $E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} = \dfrac{m\text{v}^2}{2}$.

В начальный момент времени полная механическая энергия маятника равна потенциальной энергии, выражение для которой получим, воспользовавшись уравнением (3.4):

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{пот}} = mg\,2l\sin^2\alpha/2.$$

Так как по условию углы отклонения малы ($\sin\alpha \cong \alpha$), то $E_{пот} = $ $= mg\dfrac{l\alpha^2}{2}$.

Из закона сохранения энергии следует: $mg\dfrac{l\alpha^2}{2} = \dfrac{m\text{v}^2}{2}$.

Из этого равенства можно найти значение длины математического маятника: $l = \dfrac{\text{v}^2}{\alpha^2 g}$. Тогда циклическая частота $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \dfrac{g\alpha}{\text{v}}$.

Следовательно, период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi\text{v}}{g\alpha}$.

Амплитуду колебаний найдем из равенства:

$$A = l\alpha = \frac{\text{v}^2}{\alpha g}.$$

б) Время τ определим, приравняв значения кинетической и потенциальной энергий (формулы (3.5) и (3.6)). Получим:

$$\sin(\omega\tau) = \cos(\omega\tau)\text{, или } \operatorname{tg}(\omega\tau) = 1.$$

Отсюда следует:

$$\tau = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi\text{v}}{4g\alpha} + \frac{\pi\text{v}}{g\alpha}n,$$

где n = 0, 1, 2, 3, ...

Задачи

3.1^{A}. Определить длину нити математического маятника, если он совершает одно колебание за 1 с.

Ответ. $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 0{,}25$ м .

3.2^{A}. Груз на пружине за одну минуту совершает 36 колебаний. Определить период колебаний и циклическую частоту.

Ответ. T =1,67 с; ω = 3,77 с$^{-1}$.

3.3^{B}. Определить ускорение свободного падения на Луне, если маятниковые часы идут на ее поверхности в 2,46 раза медленнее, чем на Земле.

Ответ. $g_л = g_з \left(\dfrac{T_з}{T_л} \right)^2 = 1,62\ м / с^2$.

3.4^B. Маленький шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной l = 1 м, выводят из положения равновесия так, что нить составляет малый угол с вертикалью, и отпускают. Через какой промежуток времени угол между нитью и вертикалью уменьшится вдвое?

Ответ. $\tau = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 0,33$ с.

3.5^B. Один математический маятник имеет период $T_1 = 3$ с, а другой $T_2 = 4$ с. Каков период колебания математического маятника, длина которого равна сумме длин данных маятников?

Ответ. $T = \sqrt{T_2^2 + T_1^2} = 5$ с.

3.6^B. Как относятся длины математических маятников, если за одно и то же время один совершил n_1 = 10, а другой n_2 = 30 колебаний?

Ответ. $\dfrac{l_1}{l_2} = \left(\dfrac{n_2}{n_1} \right)^2 = 9$.

3.7^C. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают по вертикали до точки подвеса, второй раз отклоняют на небольшой угол. В каком из этих случаев шарик быстрее возвратится к начальному положению?

Ответ. $t_1 = \sqrt{\dfrac{2l}{g}} = 1,41\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; $t_2 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1,57\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; $t_1 < t_2$.

3.8^B. Два математических маятника начинают колебаться одновременно. Когда первый маятник совершил N_1 = 20 полных колебаний, второй совершил только N_2 = 10 полных колебаний. Какова длина первого маятника, если длина второго l_2 = 4 м?

Ответ. $l_1 = l_2 \left(\dfrac{N_2}{N_1} \right)^2$.

3.9^C. Два одинаковых упругих шарика подвешены на невесомых нерастяжимых нитях таким образом, что нити параллельны и центры шариков находятся на одном уровне. Шарики соприкасаются друг с другом. Длина нити первого шарика равна $l = 1$ м, второго – $l = 0{,}25$ м. Нить второго шарика отклонили на небольшой угол и отпустили. Сколько раз столкнутся шарики за время $\tau = 4$ с, прошедшее с начала движения второго шарика?

Ответ. $N = 5$ раз.

3.10^B. Один из маятников совершил $N_1 = 10$ колебаний. Другой маятник за то же время совершил $N_2 = 6$ колебаний. Разность длин маятников $\Delta l = 16$ см. Найти длины маятников.

Ответ. $l_1 = \dfrac{N_1^2 \Delta l}{N_1^2 - N_2^2} = 9$ см; $l_2 = \dfrac{N_2^2 \Delta l}{N_1^2 - N_2^2} = 25$ см.

Рис. 3.3

3.11^C. Математический маятник подвешен вблизи вертикальной стены и колеблется в плоскости, параллельной стене. В стену вбит гвоздь так, что середина нити маятника наталкивается на него каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия справа налево (рис. 3.3). Найти длину нити, если период колебаний такого маятника (с помехой в виде гвоздя) $T = 2{,}41$ с.

Ответ. $l = \dfrac{2T^2 g}{\pi^2 (3 + 2\sqrt{2})} = 2$ м.

3.12^C. Лифт движется вверх ускоренно в течение времени t_1, потом замедленно в течение времени t_2. В лифте находится маятник длиной l. Сколько колебаний он сделает за все время движения, если ускорение на первом участке a_1, а на втором – a_2?

Ответ. $N = \dfrac{t_1\sqrt{g + a_1} + t_2\sqrt{g - a_2}}{2\pi\sqrt{l}}$.

3.13^C. В ракете помещены математический и пружинный маятники с одинаковым периодом колебаний $T = 1$ с. Ракета начинает движение вертикально вверх с ускорением $a = 10g$. На высоте $h = 50$ км двигатель выключается, и ракета продолжает подниматься по инерции. Сколько колебаний сделает каждый маятник за время работы двигателя ракеты и за все время подъема? Сопротивлением воздуха и уменьшением силы земного тяготения с высотой пренебречь.

Ответ. $N_{1пр} = \dfrac{1}{T}\sqrt{\dfrac{h}{5g}} = 32$; $N_{2пр} = N_{1пр} + \dfrac{1}{T}\sqrt{\dfrac{20h}{g}} = 351$;

$$N_{1м} = N_{2м} = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{22h}{10g}} = 106\,.$$

3.14^{C}. Математический маятник длиной l = 1 м подвешен в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a = 6 м/с^2. Найти период колебаний этого маятника. Какой угол α составляет линия отвеса маятника с вертикалью в движущемся вагоне при отсутствии колебаний?

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} = 1{,}85\ с\,;\quad \alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{a}{g} = 31°\,.$

3.15^{B}. Математический маятник укреплен на тележке. Его период колебаний T = 1 с. Тележка скатывается (без трения) с наклонной плоскости, образующей угол α = 30° с горизонтом. Найти период колебаний маятника во время скатывания тележки.

Ответ. $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{\cos\alpha}} = 1{,}1\ с$ **.**

3.16^{C}. Космический корабль вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Как зависит период колебания математического маятника длиной l от расстояния R точки подвеса до оси вращения? Плоскость колебания проходит через ось вращения.

Ответ. $T = 2\pi\dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{l}{R + l}}\,.$

3.17^{C}. Определить потенциальную энергию математического маятника массой m = 20 г в положении, соответствующему углу отклонения нити $\alpha = 10°$, если частота колебаний маятника ν = = 0,5 с$^{-1}$. Потенциальную энергию маятника в положении равновесия считать равной нулю.

Ответ. $E_{пот} = \dfrac{mg^2}{2\pi^2\nu^2}\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2{,}9\ мДж\,.$

3.18^{B}. Два математических маятника, один длиной l_1 = 0,1 м, а другой длиной l_2 = 0,2 м, совершают колебания с одинаковыми угловыми амплитудами. Найти периоды колебаний маятников и отношение их полных энергий, если массы шариков одинаковы.

Ответ. T_1 =0,63 с; T_2 =0,9 с; E_1/E_2 = 0,5.

§ 4. Сложение колебаний одинакового направления. Метод векторных диаграмм

Под сложением колебаний понимают нахождение закона результирующих колебаний системы в тех случаях, когда система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах.

Рассмотрим сложение колебаний одинакового направления.

Процессы, в которых складываются несколько величин, изменяющихся по гармоническому закону, весьма распространены, например, явления интерференции и дифракции света. Расчеты цепей переменного тока также проводятся с помощью сложения гармонических колебаний.

Допустим, что складываются два гармонических колебания x_1 и x_2, отличающиеся по всем параметрам:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \text{ и } x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Нужно получить уравнение колебания $x_р$, являющееся результатом сложения первых двух:

$$x_р = x_1 + x_2.$$

Аналитически получить результат сложения даже двух колебаний довольно громоздкая задача, однако решение этой задачи можно существенно упростить, пользуясь *методом векторных диаграмм*.

Изображать гармонические колебания можно графически в виде векторов на плоскости.

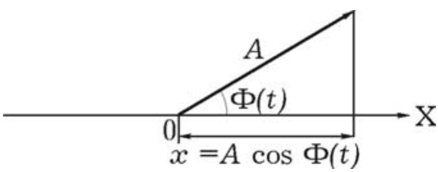


Рис. 4.1

Расположим ось X (рис. 4.1) горизонтально и из начала отсчета проведем *вектор, длина которого соответствует амплитуде A колебаний, а угол, под которым проводится вектор к оси X, равен фазе* $\Phi(t)$ *колебаний в момент времени* t. Нетрудно видеть, что проекция A_x этого вектора на ось X равна значению $x(t)$.

Полученная таким образом схема называется *векторной диаграммой. Векторная диаграмма строится для одного какого-то конкретного момента времени t.*

Рассмотрим с помощью векторной диаграммы сложение двух гармонических колебаний x_1 и x_2 (рис. 4.2). Представим оба этих колебания с помощью векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\mathbf{A}_р = \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$. Легко видеть, что проекция этого вектора на ось X равна сумме проекций A_{1x} и A_{2x} слагаемых векторов, т.е. $x_р = x_1+ x_2$. Следовательно, вектор $A_р$ представляет собой результирующее колебание. Определим амплитуду $A_р$ результирующего колебания, воспользовавшись теоремой косинуса,

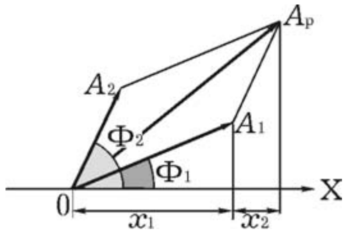


Рис. 4.2

$$A_р(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi_2(t) - \Phi_1(t))}\ . \qquad (4.1)$$

Поскольку разность фаз в общем случае зависит от времени, то амплитуда $A_р$ результирующего колебания непостоянна во времени. Поэтому результирующее колебание не является гармоническим, а представляет собой сложный колебательный процесс с пульсирующей амплитудой.

На рис. 4.3 представлены результаты сложения двух колебаний с равными амплитудами и частотами, отличающимися в N раз ($\omega_1 = N\omega_2$). Начальные фазы положены равными нулю ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$).

Из приведенных осциллограмм видно, что по мере приближения частот складываемых колебаний ($N \to 1$) результат сложения приобретает специфический характер и называется *биениями*. В этом случае результирующее колебание происходит с частотой $\omega = \omega_1 \cong \omega_2$, а амплитуда меняется по закону косинуса с частотой $\omega_б = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, которая называется *частотой биений*.

Если частоты складываемых колебаний точно равны друг другу, то разность фаз этих колебаний уже не зависит от времени: $\Delta\Phi = \varphi_{02} - \varphi_1$. Такие колебания называются *когерентными*. В этом случае результирующая амплитуда равна:

$$A_р = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}\ .$$

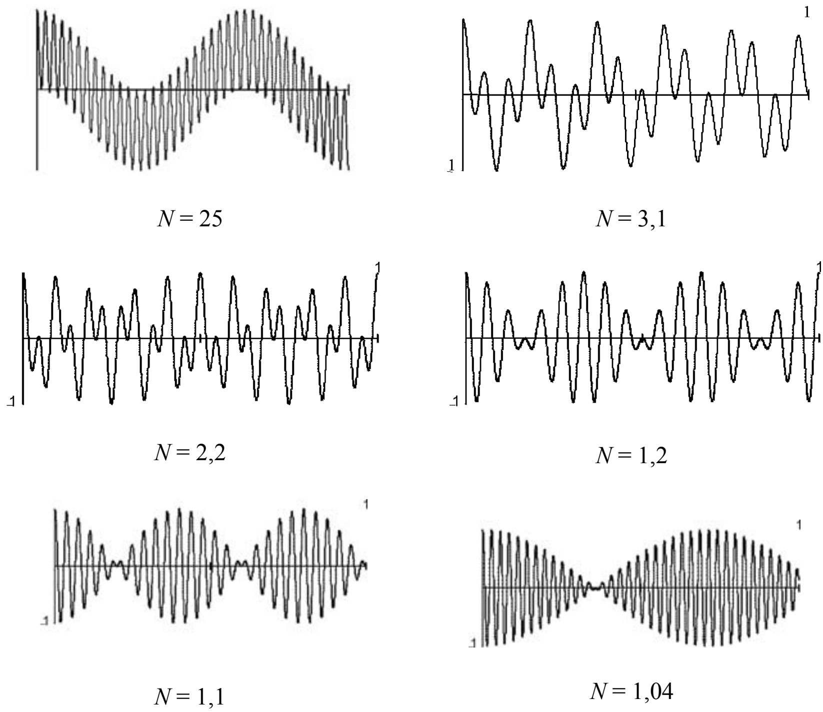


Рис. 4.3

Если $\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}) = 1$, то результирующая амплитуда максимальна – $A_{\text{pmax}} = A_1 + A_2$.

Если $\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}) = -1$, то результирующая амплитуда минимальна – $A_{\text{pmin}} = A_1 - A_2$.

Пример 4.1

Складываются два одинаково направленных колебания $x_1 = A\sin(\omega t)$ и $x_2 = A\cos(\omega t+\varphi_{02})$. Начальная фаза $\varphi_{02} = \dfrac{\pi}{6}$. Определить с помощью векторной диаграммы амплитуду $A_{\text{р}}$ и начальную фазу $\varphi_{0\text{р}}$ результирующего колебания. Записать уравнение результирующих колебаний.

Решение

Для построения векторной диаграммы необходимо колебание, записанное по закону синуса, перевести в колебание по закону косинуса. Для этого надо воспользоваться формулой приведения: $\sin\alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$. Тогда первое колебание запишется в виде $x_2 = A\cos(\omega t + \pi/2)$.

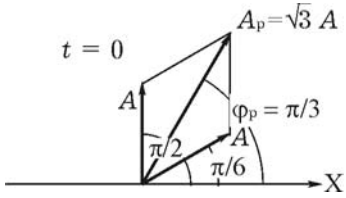


Рис. 4.4

Изобразим векторную диаграмму складываемых колебаний для момента времени $t = 0$ (рис. 4.4).

Первое колебание изобразится вектором длиной A, проведенным под углом $\varphi_{01} = \dfrac{\pi}{2}$ к оси X. Второе колебание изобразится вектором той же длиной A, но под углом $\varphi_{02} = \dfrac{\pi}{6}$ к оси X. Результирующее колебание изобразится вектором, равным сумме этих векторов. Длину этого вектора можно вычислить, используя либо выражение (4.8), либо элементарную геометрию:

$$A_\Sigma^2 = A^2 + A^2 + 2A\ A\ \cos(\underbrace{\pi/2}_{\varphi_{01}} - \underbrace{\pi/6}_{\varphi_{02}}) = 3A^2 \text{ или } A_\Sigma = \sqrt{3}A.$$

Из рис. 4.4 видно, что начальная фаза φ_{0p} результирующих колебаний равна $\dfrac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} = \pi/3$. Таким образом, результирующее колебание запишется в виде:

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = \sqrt{3}A\cos(\omega t + \pi/3).$$

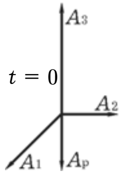
Задачи

4.1^{B}. Сложите три гармонических колебания одинакового направления и напишите уравнение результирующих колебаний:

$$x_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right);\ x_2 = 2\cos(\pi t);\ x_3 = 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Нарисуйте векторную диаграмму для момента времени $t = 0$.

Ответ. $x(t) = 2\cos\left(\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

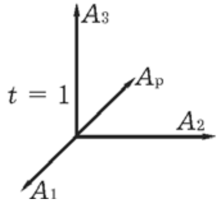


4.2^{B}. Сложите три гармонических колебания одинакового направления и напишите уравнение результирующих колебаний:

$$x_1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right);\ x_2 = 4\cos\left(\pi t + \pi\right);\ x_3 = 4\sin\left(\pi t\right).$$

Нарисуйте векторную диаграмму для момента времени $t = 1$ с.

Ответ. $x(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(\pi t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$;



4.3^{B}. Складываются четыре одинаково направленных колебания с равными амплитудами A и частотами. Фазы всех колебаний сдвинуты относительно друг друга на величину $\Delta\varphi$. Определить графически с помощью векторных диаграмм амплитуду результирующего колебания, если $\Delta\varphi$ равно: а) $\dfrac{\pi}{6}$; б) $\dfrac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $A_р = A\sqrt{3}$; б) $A_р = A\sqrt{5}$; в) $A_р = 0$.

4.4^{B}. Будет ли гармоническим колебание, происходящее по закону $x(t) = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$. Найти амплитуду, начальную фазу и циклическую частоту этого колебания.

Ответ. $A = 5$; $\varphi_0 = \arcsin 0{,}6$; $\omega_р = \omega$.

ВОЛНЫ

§ 5. Определения. Виды волн

Волной называется процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.

Если направление колебаний источника волн перпендикулярно направлению вектора скорости распространения волны, то такая волна называется *поперечной*. К поперечным волнам относятся электромагнитные волны и, в частности, свет.

Если направление колебаний источника волн параллельно вектору скорости распространения, то такая волна называется *продольной*. К продольным волнам относятся звуковые волны.

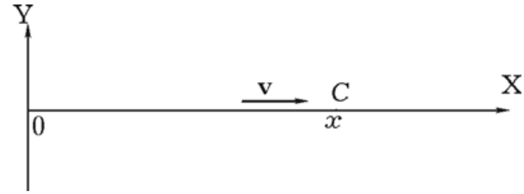
Геометрическое место точек, до которых в данный момент дошла волна, называется *фронтом волны*. Если фронт волны представляет сферу, то волна называется *сферической*. Сферическую волну создает точечный источник волн, например светящаяся точка. Если фронт волны представляет плоскость, то волна называется *плоской*. Плоскую волну можно получить, поместив точечный источник в фокальной плоскости линзы или зеркала. Тогда свет, пройдя линзу или отразившись от зеркала, даст параллельный пучок света с плоским фронтом.

Допустим, что источник гармонических колебаний создает плоскую волну, распространяющуюся со скоростью v. Такая волна называется плоской гармонической волной.

Направим ось X по направлению вектора скорости распространения волны, и начало отсчета поместим в месте расположения источника, который возбуждает колебания $y(t) = A\cos \omega t$ (рис. 5.1).

Рассмотрим, какого вида колебания $y(t, x)$ будут происходить в точке C, имеющую координату x. Тогда полученное выражение для $y(t, x)$ и будет называться *уравнением плоской гармонической волны*. В отсутствии поглощения в точке C возникнут гармонические колебания типа $A\cos\,\omega t$ через время $\tau = x/\text{v}$, необходимое для прохождения расстояния x со скоростью v.

Рис. 5.1



Таким образом, в точке C будут происходить колебания вида $y(t, x) = A\cos\,[\omega(t - \tau)]$. С учетом того, что $\omega = 2\pi/T$, где T – период колебаний, получим: $y(t,x) = A\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{T\text{v}}\right)$.

Расстояние vT, проходимое волной за один период колебаний источника волн, называется *длиной волны* λ.

Окончательно имеем:

$$y(t,x) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\cos\,(\underbrace{\omega t - kx}_{\Phi}), \qquad (5.1)$$

$$\lambda = \text{v}T = \text{v}/\nu. \qquad (5.2)$$

В этих выражениях: A – амплитуда волны; ν – частота колебаний источника волн или частота волны; $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – циклическая частота волны; $\lambda = \text{v}T = \text{v}/\nu$ – длина волны; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; x – расстояние, прошедшее волной от источника волны до исследуемой точки, называемое *ходом волны*; $\Phi = (\omega t - kx)$ – *фаза* волны.

Пример 5.1

Звук распространяется в воде со скоростью v = 1450 м/с. Расстояние между двумя точками, в которых фазы волны отличаются на π, $\Delta x = 0{,}5$ м. Найти частоту звуковой волны.

Решение

По условию разность фаз $\Delta\Phi = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = k(x_1 - x_2) = \pi$. Следуя определениям, получим: $(2\pi/\lambda)(\Delta x) = \pi$. Из этого равенства вычислим длину волны $\lambda = 2\Delta x = 1$ м.

Следовательно, частота звуковой волны равна:

$$\nu = v/\lambda = 1450 \text{ Гц}.$$

Пример 5.2

По поверхности воды в озере волна распространяется со скоростью $v = 6$ м/с. Каковы период и частота колебаний бакена (плавучего навигационного знака), если длина волны – $\lambda = 3$ м?

Решение

Этот пример иллюстрирует следующую особенность волновых процессов.

Волна распространяется вдоль поверхности воды в горизонтальном направлении. Бакен совершает колебания в вертикальном направлении. Отсюда следует, что *при распространении волны происходит перенос энергии* (раскачка бакена в вертикальном направлении), *а не перенос вещества* (воды) *в направлении распространения волны.*

Частота и длина волны связаны соотношением (5.2). Следовательно, частота волны равна: $\nu = v/\lambda = 2\ \text{с}^{-1} = 2$ Гц.

Из уравнения (1.1) найдем период колебаний бакена:

$$T = 1/\nu = 0{,}5 \text{ с}.$$

§ 6. Интерференция волн

Интерференцией называется сложение когерентных волн.

Когерентными называются волны, разность фаз $\Delta\Phi$ которых не зависит от времени.

Допустим, что две плоские волны распространяются в одном направлении вдоль оси X. Уравнение первой волны имеет вид $y_1(x, t) = A_1\cos(\omega_1 t - k_1 x_1)$. Уравнение второй волны – $y_2(x, t) = A_2\cos(\omega_2 t - k_2 x_2)$.

Будем искать результат сложения этих волн в некоторой точке C на оси X:

$$y(x, t) = A_1\cos(\omega_1 t - k_1 x_1) + A_2\cos(\omega_2 t - k_2 x_2).$$

Для нахождения результирующей амплитуды $A_р$ интерферирующих волн воспользуемся методом векторных диаграмм (см. § 4).

В результате получим (4.1):

$$A_р(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\Phi)}\ ,$$

где $\Delta\Phi$ – разность фаз интерферирующих волн, которая будет равна:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2x_2 - k_1x_1).$$

Для того чтобы это выражение не зависело от времени, необходимо потребовать, чтобы $\omega_1 = \omega_2$. Тогда периоды колебаний таких волн будут также равны, и, следовательно, будут равны их длины волн и волновые числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $k_2 = k_1 = k$.

Это означает, что <u>когерентные волны имеют одинаковые частоты и длины волн</u>. Тогда разность фаз интерферирующих волн будет равна:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\ . \tag{6.1}$$

В этом выражении: λ – длина волны; $\Delta x = (x_1 - x_2)$ – разность хода интерферирующих волн.

В результате получим, что результирующая амплитуда при интерференции волн будет равна:

$$A_р(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\right)}\,. \tag{6.2}$$

Два колебания в одной точке пространства при сложении дадут *максимум*, если эти колебания будут происходить в фазе, т.е. разность их фаз будет равна нулю, либо 2π, 4π, 6π и т.д. (см. § 4).

Другими словами, их разность фаз должна быть равна:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = 2\pi \cdot m,\ \text{где}\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

В этом случае $\cos(\Delta\Phi) = 1$, и $A_р = (A_1 + A_2)$.

Таким образом, результирующая амплитуда будет максимальна (*условие максимума при интерференции*), если разность хода двух интерферирующих волн будет равна целому числу длин волн или *четному* числу полуволн:

$$\Delta x = m\lambda = 2m\ (\lambda/2). \tag{6.3}$$

Две волны при сложении дадут *минимум*, если колебания в данной точке пространства от двух интерферирующих источников будут происходить в противофазе, т.е. разность их фаз будет равна π, либо 3π, 5π, 7π и т.д.:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = (2m+1)\pi, \text{ где } \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

В этом случае $\cos(\Delta\Phi) = -1$, и $A_р = |A_1 - A_2|$. Таким образом, результирующая амплитуда будет минимальна (*условие минимума при интерференции*), если разность хода двух интерферирующих волн будет равна *нечетному* числу длин полуволн:

$$\Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (6.4)$$

Если интерферирующие волны имеют равную амплитуду ($A_1 = A_2$), то в данной точке пространства они погасят друг друга.

Пример 6.1

В качестве примера рассмотрим задачу, предложенную на ЕГЭ в 2009 г.

«В классе проводится эксперимент по интерференции звука с помощью динамиков, излучающих звук с частотой 2 кГц (рис. 6.1). Ученик в точке *B* слышит максимально громкий звук. При перемещении в точку *A*, расположенную напротив динамика Д1, звук сначала ослабевает по громкости, а затем в точке *A* снова достигает максимума.

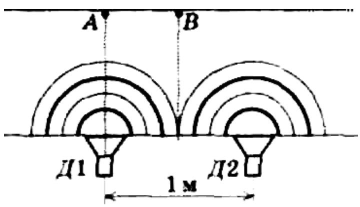


Рис. 6.1

Какое время движется звуковая волна от динамика Д1 до ученика в точке *A*? Скорость звука считать равной 340 м/с, расстояние между динамиками – 1 м. Ответ выразите в миллисекундах и округлите до десятых миллисекунды.»

Решение

Точка *B* находится на одном и том же расстоянии от динамиков Д1 и Д2. Следовательно, разность хода волн от этих динамиков равна нулю. Поэтому согласно (6.2) в точке *B* слышен максимально громкий звук. При перемещении к точке *A* ход волны от динамика Д2 увеличивается, а ход волны от динамика Д1 уменьшается. Следовательно, условие максимума нарушается, и звук от двух динамиков ослабляется. В точке *A* ученик вновь слышит максимально громкий звук. Это означает, что разность хода волн от динамиков Д1 и Д2 становится равной длине волны λ.

Вычислим по данным задачи длину волны

$$\lambda = \mathrm{v}/\nu = 0{,}17 \text{ м}.$$

Обозначим ход волны от динамика Д1 до точки *A* за x. Тогда ход волны от динамика Д2 до точки *A* будет равен $x + \lambda$.

Воспользовавшись теоремой Пифагора, вычислим ход волны x от динамика *Д*1:

$$x^2 + 1 = (x + \lambda)^2; \; x = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda} = 2{,}86 \text{ м}.$$

Время движения звуковой волны τ от динамика Д1 до ученика в точке *A* равно: $\tau = \dfrac{x}{\mathrm{v}} = 0{,}0084118 \text{ с} = 8{,}4 \text{ мс}$.

Задачи

6.1^A. Определить максимальную и минимальную длины звуковых волн, воспринимаемых человеком. Скорость звука $\mathrm{v} = 340$ м/с граничные частоты $\nu_1 = 20$ Гц и $\nu_2 = 20\,000$ Гц.

Ответ: $\lambda = \dfrac{V}{\nu}$; $\lambda_1 = 17$ м; $\lambda_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ м.

6.2^B. Человек, стоящий на берегу моря, определил, что расстояние между следующими друг за другом гребнями $\lambda = 12$ м. Кроме того, он подсчитал, что за $t = 75$ с мимо него прошло $n = 16$ волновых гребней. Определить скорость распространения волн.

Ответ: $\mathrm{v} = \dfrac{\lambda(n-1)}{t} = 2{,}4$ м/с.

6.3^{A}. Рыболов заметил, что за время t = 10 с поплавок совершил на волнах n = 20 колебаний, а расстояние между соседними гребнями волн λ = 1,2 м. Какова скорость распространения волн?

Ответ: v = 2,4 м/с.

6.4^{A}. Маятник длиной l = 2 м совершает за время t = 1 ч N = 1268 колебаний. Определить ускорение свободного падения по этим данным.

Ответ: $g = \dfrac{4\pi^2 l N^2}{t^2} = 9{,}80$ м/с^2.

6.5^{A}. Длина звуковой волны в воздухе для самого низкого мужского голоса λ = 4,3 м, а для самого высокого женского голоса λ = 25 см. Найти частоты колебаний этих голосов.

Ответ: ν_1 = 79 Гц; ν_2 =1360 Гц.

6.6^{A}. Камертон, настроенный на ноту «ля» первой октавы, имеет частоту колебаний 440 Гц. Сколько длин волн уложится на расстоянии, которое звук, изданный камертоном, пройдет за 2 с?

Ответ: N = 880.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

МИФИ – базовое высшее учебное заведение России, предназначенное для подготовки инженеров: физиков, математиков, системотехников – инженеров-исследователей, обладающих глубокими знаниями физико-математических дисциплин в сочетании с серьезной инженерной подготовкой.

ФАКУЛЬТЕТЫ	*телефон*
Факультет экспериментальной и теоретической физики (Т)	8(495)324-84-40
Физико-технический факультет (Ф)	8(495)324-84-41
Факультет автоматики и электроники (А)	8(495)324-84-42
Факультет кибернетики (К)	8(495)324-84-46
Факультет информационной безопасности (Б)	8(495)324-84-00
Гуманитарный факультет (Г):	8(495)323-90-62
- Институт международных отношений	8(495)323-95-83
- Финансовый институт	8(495)324-03-78
- Институт инновационного менеджмента	8(495)323-90-88
- Экономико-аналитический институт	8(495)323-92-15
- Институт финансовой и экономической безопасности	8(495)323-95-27

ПРИЕМНАЯ КОМИССИЯ 8(495)324-84-17; 8(495)323-95-12

Адрес МИФИ: *115409, г. Москва, Каширское ш., д.31*

По вопросам повышения квалификации учителей физики, математики и информатики, а также по работе МИФИ со школами в регионах РФ обращаться в **Центр повышения квалификации и переподготовки кадров** по тел.: ***8(495)324-05-08, 8(499)725-24-60*.**