НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ, ТРИГОНОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИИ

Для подготовительных курсов ЦДП

Москва 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ, ТРИГОНОМЕТРИИ И ГЕОМЕТРИИ

Для подготовительных курсов ЦДП

Под редакцией
А.И. Забоева и В.Н. Цикунова

6-е издание, без изменений

Москва 2010

УДК 514.742.2(076)+514.116(076)+ 514(076)
ББК 22.151я7
С 23

Сборник задач по векторной алгебре, тригонометрии и геометрии. Для подготовительных курсов ЦДП Под ред. А.И. Забоева и В.Н. Цикунова: Учебное пособие. 6-е изд., без изм. М.: НИЯУ МИФИ. 2010. – 112 с.

(Воронова Т.Я., Забоев А.И., Иванов А.С., Крючков В.С., Мирошин Н.В., Мусатов В.И., Цикунов В.Н.)

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с программой по математике для дневных подготовительных отделений. Задачи систематизированы по темам, расположены, как правило, в порядке возрастания трудности.

Данное пособие предназначено для дневного подготовительного отделения и может быть использовано для подготовительных курсов НИЯУ МИФИ.

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ в качестве учебного пособия

Редактор *И.Н. Маркина*

Подписано в печать 20.09.2010. Формат 60×84 1/16.
Печ. л. 7,0. Изд. № 071-1. Тираж 300 экз. Заказ № 287.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31.

ЗАДАЧИ

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{c}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+2\vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{b}+3\vec{c}$; $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$;

3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}+3\vec{c}$; $\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$;

4) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$; $-\vec{a}+(2\vec{b}-\vec{c})$; $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})$.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ связаны соотношениями:

1) $\begin{cases} 5\vec{c}+3\vec{d}=\vec{a}, \\ 2\vec{c}+\vec{d}=\vec{b}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4\vec{c}-\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}, \\ -3\vec{c}+\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}, \\ \vec{a}-\vec{b}=\vec{c}-2\vec{d}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -\vec{a}+\vec{c}=2\vec{b}-\vec{d}, \\ \vec{b}+\vec{d}=3\vec{a}-\vec{c}, \ (\vec{b}\neq\vec{0}). \end{cases}$

Выразите векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и постройте их.

3. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Выразите векторы $\vec{m}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ через заданные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если

1) $\begin{cases} 2\vec{m}+\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}, \\ \vec{m}+2\vec{p}+\vec{q}=\vec{b}, \\ \vec{m}+\vec{p}+2\vec{q}=\vec{c}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \vec{m}-\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}, \\ \vec{m}+\vec{p}-\vec{q}=\vec{b}, \\ -\vec{m}+\vec{p}+\vec{q}=\vec{c}. \end{cases}$

Постройте эти векторы.

4. Даны ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажите, что

1) $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}-\vec{b}|\geq|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

5. Даны ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) при каком условии вектор $\vec{a}+\vec{b}$ делит угол пополам между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

б) при каком условии вектор $\vec{a}-\vec{b}$ делит угол пополам между векторами $\vec{a}$ и $-\vec{b}$?

6. При каком условии

1) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$?

7. Известно, что $|\vec{a}|=12$, $|\vec{b}|=5$:

1) найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}+\vec{b}|=14$;

2) найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$, если $|\vec{a}-\vec{b}|=15$.

8. В треугольнике ABC $\vec{AC}=\vec{b}$, $\vec{AB}=\vec{c}$.

1) Найдите $\vec{AO}$, если O – точка пересечения медиан этого треугольника;

2) найдите $\vec{BK}$, если $K\in[BC]$, $|BK|:|KC|=4:1$.

9. В параллелограмме $ABCD$ $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

10. Дан параллелограмм $ABCD$ и в его плоскости произвольная точка O.

а) Докажите, что $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$;

б) при каком условии $\vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OB}+\vec{OD}=O$?

11. В трапеции $ABCD$ основание AD в k раз больше основания BC. Выразите вектор $\vec{ED}$ через векторы $\vec{EA}=\vec{a}$, $\vec{EB}=\vec{b}$, $\vec{EC}=\vec{c}$, где E – произвольная точка плоскости, в которой расположена трапеция.

12. Точки A, B, C, D – середины сторон плоского четырехугольника. Докажите, что $\vec{AB}+\vec{CD}=O$.

13. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что $\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}+\vec{AE}+\vec{AF}=3\vec{AD}$.

14. Дан треугольник ABC, AL – биссектриса угла A. Найдите $\vec{AL}$, если $\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$.

15. В параллелограмме $ABCD$ $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. Вектор $\vec{MN}$ имеет разложение $\vec{MN}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$. Постройте точки M и N, если известно, что они лежат на сторонах параллелограмма.

16. Даны точки A (1; 2), B (–2; 3). Найдите

1) координаты $\vec{AB}$; 2) координаты $\vec{BA}$.

17. Даны точки P (1; 0; 2) и Q (3; 4; 2). Найдите

1) координаты $\vec{PQ}$; 2) координаты $\vec{QP}$.

18. Вычислите модуль вектора $\vec{b}$:

1) $\vec{b}=(3;\ -4)$; 2) $\vec{b}=(-12;\ 5)$;

3) $\vec{b}=(-2;\ -6;\ 3)$; 4) $\vec{b}=(10;\ 15;\ -20)$.

19. Определите координаты точки A, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}=(5;\ 6;\ 1)$, если его начало совпадает с точкой B (–1; 6; 3).

20. Определите начало вектора $\vec{c}=(-2;\ 1;\ 0)$, если его конец совпадает с точкой (3; 2; 1).

21. Даны точки A (x; 2) и B (3; y). Найдите x и y, если

1) $\vec{AB}=(2;\ 1)$; 2) $\vec{BA}=(-1;\ 5)$.

22. Даны точки M (x; 2; 3) и N (1; 3; z). Найдите x и z, если

1) $\vec{MN}=(3;\ 1;\ 5)$; 2) $\vec{NM}=(4;\ -1;\ -3)$.

23. Даны модуль вектора $|\vec{a}|$ и углы α, β, γ, которые он составляет соответственно с осями $0x$, $0y$, $0z$. Вычислите проекции x, y, z вектора $\vec{a}$ на координатные оси, если:

1) $|\vec{a}|=4$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{2\pi}{3}$;

2) $|\vec{a}|=2$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{4}$.

24. Вычислите направляющие косинусы вектора $\vec{d}$:

1) $\vec{d}=(2;\ -2;\ 1)$; 2) $\vec{d}=\left(-\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$.

25. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

1) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{3}{3}\pi$;

2) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$;

3) $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$?

26. Вектор $\vec{l}$ составляет с осями $0x$ и $0y$ углы $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и $\beta=\frac{2}{3}\pi$. Какой угол он составляет с осью $0z$?

27. Вектор $\vec{k}$ составляет с осями $0y$ и $0z$ углы $\beta = \frac{\pi}{3}$ и $\gamma = \frac{\pi}{5}$. Какой угол он составляет с осью $0x$?

28. Вектор $\vec{m}$ составляет с координатными осями $0x$ и $0z$ углы α и γ. Вычислите его координаты, если

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ и $|\vec{m}| = 8$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \arccos\frac{1}{3}$ и $|\vec{m}| = 6\sqrt{23}$.

29. Даны два вектора $\vec{c} = (1;\ -3;\ 5)$ и $\vec{d} = (2;\ 0;\ -1)$. Определите координаты следующих векторов:

1) $\vec{c} + \vec{d}$; 2) $\vec{d} - \vec{c}$; 3) $-2\vec{d}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{c}$; 5) $4\vec{c} + 2\vec{d}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{c} - 2\vec{d}$.

30. Проверьте коллинеарность векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$; установите, какой из них длиннее другого и во сколько раз; сонаправлены они или нет:

1) $\vec{p} = (-4;\ 2;\ -6)$, $\vec{q} = (2;\ -1;\ 3)$;

2) $\vec{p} = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right)$, $\vec{q} = (4;\ 0;\ 8)$.

31. При каких α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны:

1) $\vec{a} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 18\vec{j} - 3\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \vec{j} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \beta\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$?

32. Проверьте, что фигура $ABCD$ – трапеция, если

1) $A\ (0;\ 1;\ 2)$, $B\ (-1;\ 0;\ 1)$, $C\ (2;\ 1;\ 4)$, $D\ (6;\ 3;\ 8)$;

2) $A\ (-3;\ 1;\ 1)$, $B\ (4;\ 2;\ 0)$, $C\ (4;\ 3;\ 1)$, $D\ (-3;\ 3;\ 3)$.

33. Найдите орт вектора $\vec{c}$:

1) $\vec{c} = (1;\ -2;\ 2)$; 2) $\vec{c} = (0;\ -8;\ 15)$.

34. Дано разложение вектора $\vec{p}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{p} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Определите разложение по этому же базису вектора $\vec{l}$, параллельного вектору $\vec{p}$ и сонаправленного с ним, если известно, что $|\vec{l}| = 26$.

35. Два вектора $\vec{m} = (2;\ 6;\ 3)$ и $\vec{n} = (-6;\ 3;\ 2)$ приложены к одной точке. Определите координаты вектора $\vec{p}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, при условии, что $|\vec{p}| = \sqrt{122}$.

36. Векторы $\vec{AB} = (1;\ 0;\ 3)$ и $\vec{AC} = (3;\ 2;\ -3)$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определите координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

37. На плоскости даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Определите разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других:

1) $\vec{a} = (11;\ -8)$, $\vec{b} = (1;\ 2)$, $\vec{c} = (-3;\ 4)$;

2) $\vec{a} = (0;\ -4)$, $\vec{b} = (3;\ -9)$, $\vec{c} = (-1;\ 1)$;

3) $\vec{a} = (2;\ -2)$, $\vec{b} = (1;\ -1)$, $\vec{c} = (0;\ 1)$;

4) $\vec{a} = (-3;\ 3)$, $\vec{b} = (0;\ 2)$, $\vec{c} = (-1;\ 1)$.

38. Даны четыре вектора $\vec{m}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. Определите разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных:

1) $\vec{m} = (-5;\ 5;\ -7)$, $\vec{p} = (0;\ 1;\ -3)$, $\vec{q} = (2;\ -1;\ 1)$, $\vec{r} = (1;\ 0;\ 2)$;

2) $\vec{m} = (-1;\ -1;\ 1)$, $\vec{p} = (-3;\ 2;\ 0)$, $\vec{q} = (0;\ 3;\ -2)$, $\vec{r} = (2;\ 0;\ -1)$.

39. Векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ образуют угол $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Зная, что $|\vec{k}| = \sqrt{2}$, $|\vec{l}| = 4$, найдите: 1) $\vec{k}\vec{l}$; 2) $\vec{k}^2$ 3) $\vec{l}^2$; 4) $(\vec{k} - \vec{l})^2$; 5) $(2\vec{k} - \vec{l})(2\vec{k} + \vec{l})$; 6) $(\vec{k} + \vec{l})(\vec{k} - 2\vec{l})$; 7) $(2\vec{k} - 5\vec{l})^2$.

40. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, найдите: 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; 7) $(\vec{a} - 3\vec{b})^2$.

41. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{l}$ образует с ними углы, равные φ. Вычислите:

1) $(5\vec{c} - 2\vec{d})(\vec{c} + 3\vec{d})$; 2) $(\vec{c} + \vec{d} - \vec{l})^2$; 3) $(\vec{c} - 2\vec{d} + 3\vec{l})^2$, если:

а) $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 4$, $|\vec{l}| = 8$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

б) $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 3$, $|\vec{l}| = 5$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

42. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Найдите $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$, если:

1) $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 14$, $|\vec{c}| = 15$; 2) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 10$, $|\vec{c}| = 12$.

43. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен α. Определите модуль вектора $\vec{m}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$, если:

1) $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=4$, $|\vec{r}|=6$, $\alpha=\frac{2}{3}\pi$;

2) $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $|\vec{r}|=3$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

44. Вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{p}$, если:

1) $\vec{p}=\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$; 2) $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\,\vec{b})}{\vec{a}^2}$.

45. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют угол φ. Вычислите угол α между векторами $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, если:

1) $|\vec{p}|=\sqrt{3}$, $|\vec{q}|=1$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$; 2) $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

46. Даны векторы $\vec{AB}=\vec{b}$ и $\vec{AC}=\vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найдите разложение по базису $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектора, приложенного к вершине B и совпадающего с его высотой BD.

47. Вычислите: 1) $\vec{c}\,\vec{d}$; 2) $\sqrt{\vec{c}^2}$; 3) $\sqrt{\vec{d}^2}$; 4) $(\vec{c}-3\vec{d})(\vec{c}+2\vec{d})$; 5) $(\vec{c}+\vec{d})^2$; 6) $(\vec{c}-\vec{d})^2$, если:

а) $\vec{c}=(2;\ -1;\ -1)$, $\vec{d}=(3;\ 4;\ -12)$;

б) $\vec{c}=(-6;\ 2;\ 3)$, $\vec{d}=(-4;\ 2;\ 4)$.

48. Вычислите, какую работу производит сила $\vec{F}$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{r}$:

1) $\vec{F}=(1;\ 5;\ -3)$, $\vec{r}=(0;\ 2;\ 6)$; 2) $\vec{F}=(-2;\ -3;\ 1)$, $\vec{r}=(1;\ 2;\ 3)$.

49. Вычислите, какую работу совершает сила $\vec{f}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M в положение N:

1) $\vec{f}=(5;\ -1;\ 2)$, $M(1;\ 3;\ 4)$, $N(0;\ -2;\ -5)$;

2) $\vec{f}=(-1;\ 3;\ -1)$, $M(-1;\ 0;\ 2)$, $N(0;\ 12;\ 1)$.

50. Даны три силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B:

1) $\vec{F}_1=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{F}_2=(2;\ -1;\ -3)$, $\vec{F}_3=(0;\ 5;\ 4)$, $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 6)$;

2) $\vec{F}_1=(-1;\ 3;\ -2)$, $F_2=(1;\ 3;\ -4)$, $\vec{F}_3=(1;\ -4;\ 5)$, $A(0;\ 2;\ 6)$, $B(1;\ 1;\ 1)$.

51. Даны точки A, B, C. Вычислите:

1) $(3\vec{BA}-2\vec{BC})(3\vec{AB}+\vec{AC})$; 2) $\sqrt{\vec{AB}^2}$;

3) координаты вектора $\vec{AC}\,(\vec{AB}\,\vec{BC})$:

а) $A(1;\ 0;\ -4)$, $B(2;\ 1;\ 3)$, $C(-1;\ -1;\ -1)$;

б) $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(-2;\ 0;\ 5)$, $C(2;\ -3;\ 4)$.

52. При каком значении α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 1) взаимно перпендикулярны; 2) образуют острый угол; 3) образуют тупой угол:

а) $\vec{a}=\alpha\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\alpha\vec{i}+\alpha\vec{j}-\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(-\alpha,\ 4,\ -\alpha)$, $\vec{b}=(5;\ -1;\ \alpha)$?

53. При каком значении x $(AC)\widehat{\ }(BD)=\frac{\pi}{2}$, если:

1) $A(x;\ 1;\ 2)$, $B(0;\ 3;\ 4)$, $C(1;\ 2;\ 5)$, $D(2;\ -1;\ 4)$;

2) $A(-1;\ 2;\ -3)$, $B(x;\ 4;\ 5)$, $C(3;\ 2;\ -3)$, $D(7;\ 8;\ 9)$?

54. Вычислите косинус угла, образованного векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

1) $\vec{c}=(-1;\ 2;\ 5)$, $\vec{d}=(6;\ 3;\ 1)$; 2) $\vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

55. Даны три вершины треугольника ABC: $A(0;\ 3;\ -1)$, $B(5;\ 8;\ 12)$, $C(6;\ 3;\ 7)$. Найдите:

1) величины внутренних углов A и C;

2) величину внешнего угла при вершине B.

56. Вектор $\vec{x}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ и образует с осью $0y$ острый угол. Найдите $\vec{x}$, если

1) $\vec{a}=(3;\ 2;\ 5)$, $|\vec{x}|=3\sqrt{38}$; 2) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $|\vec{x}|=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

57. Найдите вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{b}$, если

1) $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{x}\vec{b}=-12$; 2) $\vec{b}=(1;\ 0;\ 5)$, $\vec{x}\vec{b}=-26$.

58. Найдите вектор $\vec{y}$, образующий тупой угол с осью $0z$ и перпендикулярный к векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если

1) $\vec{b}=(6;\ -2;\ 0)$, $\vec{c}=(2;\ 3;\ 11)$, $|\vec{y}|=\sqrt{11}$;

2) $\vec{b}=(2;\ 3;\ 4)$, $\vec{c}=(4;\ 4;\ 7)$, $|\vec{y}|=3\sqrt{5}$.

59. Вектор $\vec{x}$ таков, что $\vec{x} \perp \vec{d}$ и $\vec{x} \perp \vec{b}$. Найдите $\vec{x}$, если

1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 15$;

2) $\vec{a} = (-5; 6; 8)$, $\vec{b} = (4; -5; -6)$, $\vec{x}(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) = -4$.

60. Даны векторы $\vec{a} = (1; 0; 2)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$ и $\vec{c} = (4; 5; 0)$. Найдите вектор $\vec{x}$, если:

$\vec{x}\vec{a} = 5$, $\vec{x}\vec{b} = 6$, $\vec{x}\vec{c} = 9$.

61. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (1; -2; 2)$;

2) $\vec{a} = (-1; 5; 4)$, $\vec{b} = (4; 0; -3)$.

62. Даны три вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$. Вычислите проекцию вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a} + \vec{c}$.

63. Даны точки $A\ (0; -1; 5)$, $B\ (2; 4; 0)$, $C\ (-3; -1; 2)$ и $D\ (8; 6; -3)$. Найдите проекцию вектора $\vec{AC}$ на ось вектора $\vec{BD}$.

64. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол φ. Найдите $\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|$, если

1) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 2) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

3) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 4) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

65. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если:

1) $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = \vec{j} - \vec{k}$; 2) $\vec{p} = \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j}$.

66. Найдите: 1) $\left|[(\vec{c} + \vec{d})(\vec{c} - \vec{d})]\right|$; 2) $\left|[(3\vec{c} + \vec{d})(-\vec{c} + \vec{d})]\right|$, если векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ взаимно перпендикулярны и а) $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 3$; б) $|\vec{c}| = \sqrt{2}$, $|\vec{d}| = \sqrt{3}$.

67. Векторы $\vec{l}$ и $\vec{m}$ образуют угол φ. Вычислите: 1) $[\vec{l}\vec{m}]^2$; 2) $[(3\vec{l} + \vec{m})(\vec{l} + 3\vec{m})]^2$, если:

а) $|\vec{l}| = 2$, $|\vec{m}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $|\vec{l}| = 3$, $|\vec{m}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

68. При каком условии $[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{a}]$?

69. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, чтобы векторы: 1) $\vec{c} + \vec{d}$ и $\vec{c} - \vec{d}$; 2) $\vec{c} + 2\vec{d}$ и $\vec{c} - 2\vec{d}$ были коллинеарны?

70. Найдите координаты векторных произведений: 1) $[\vec{a}\vec{b}]$; 2) $[\vec{b}\vec{a}]$; 3) $[(3\vec{a} + \vec{b})\vec{b}]$; 4) $[\vec{b}(\vec{b} + 3\vec{a})]$; 5) $[(2\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})]$; 6) $[(2\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b})]$, если:

а) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$; б) $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (3; 4; 1)$;

в) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 3j + \vec{k}$; г) $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

71. Найдите координаты векторов 1) $\vec{m} = [\vec{AC}\,\vec{BC}]$; 2) $\vec{l} = [(\vec{AB} - 3\vec{CA})\,\vec{CB}]$, если:

а) $A\ (1; 2; 0)$, $B\ (-3; 1; 4)$, $C\ (2; 7; 1)$;

б) $A\ (0; 1; 0)$, $B\ (4; 0; 2)$, $C\ (3; 1; 1)$.

72. Сила $\vec{F}$ приложена к точке A. Найдите момент $\vec{M}$ этой силы относительно начала координат, если:

1) $\vec{F} = (1; 0; 3)$, $A\ (-1; 2; 0)$; 2) $\vec{F} = (0; 2; -1)$, $A\ (2; 0; -1)$.

73. Даны точки K, L, M. Найдите площадь треугольника KLM, если

1) $K\ (1; -3; 1)$, $L\ (2; 0; 7)$, $M\ (3; 4; -1)$;

2) $K\ (2; 5; 0)$, $L\ (1; 0; 0)$, $M\ (2; -1; 1)$.

74. Даны вершины треугольника $P\ (2; 0; 1)$, $Q\ (2; 1; 1)$, $R\ (1; 1; 1)$. 1) Найдите длины высот: а) $|PM|$; б) $|QN|$.

75. Вычислите синус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) $\vec{a} = (1; 0; 2)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$; 2) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; 1)$;

3) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; 4) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

76. Вычислите $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$ и $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$, если

1) $\vec{a} = (0; 2; 0)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 0; 1)$;

2) $\vec{a} = (1; 0; -1)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$, $\vec{c} = (2; 0; 0)$;

3) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$;

4) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.

77. Непосредственным вычислением чисел $A = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$ и $B = \vec{a}[\vec{b}\vec{c}]$ покажите, что $A = B$, если:

1) $\vec{a} = (1; 0; 8)$, $\vec{b} = (2; 3; -1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$;

2) $\vec{a} = (2; 0; -3)$, $\vec{b} = (-1; 1; 0)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$.

78. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найдите $\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]$, если:

1) $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 4)$, $\vec{c} = (5; 6; -1)$;

2) $\vec{a}=(2;\ 0;\ 1)$, $\vec{b}=(3;\ -1;\ 1)$, $\vec{c}=(4;\ 0;\ 2)$;

3) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$;

4) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

79. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если:

1) $\vec{a}=(2;\ 0;\ 3)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ 5)$, $\vec{c}=\left(3;\ 1;\ -\frac{35}{3}\right)$;

2) $\vec{a}=(1;\ 0;\ -4)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 0)$, $\vec{c}=(-1;\ 1;\ 2)$?

80. При каком значении x точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если:

1) $A\ (-1;\ 0;\ 3)$, $B\ (x;\ 1;\ 4)$, $C\ (2;\ 1;\ 5)$, $D\ (-6;\ 3;\ 3)$;

2) $A\ (2;\ -1;\ 5)$, $B\ (3;\ 4;\ 6)$, $C\ (2;\ 2;\ 4)$, $D\ (x;\ 1;\ 5)$?

81. Вычислите объем тетраэдра с вершинами A, B, C, D:

1) $A\ (4;\ 3;\ 0)$, $B\ (-1;\ 2;\ 1)$, $C\ (3;\ 4;\ 1)$, $D\ (5;\ 6;\ 2)$;

2) $A\ (-1;\ 1;\ 2)$, $B\ (0;\ 3;\ 3)$, $C\ (4;\ 5;\ -1)$, $D\ (2;\ 1;\ 4)$.

82. Объем тетраэдра равен V, три его вершины находятся в точках K, L, M. Определите координату вершины N, если она расположена на оси $0z$:

1) $V=\frac{11}{3}$, $K\ (-2;\ 1;\ 4)$, $L\ (-1;\ 5;\ 5)$, $M\ (2;\ 3;\ 4)$;

2) $V=10$, $K\ (-3;\ 2;\ 5)$, $L\ (-3;\ 4;\ 4)$, $M\ (6;\ 0;\ 2)$.

83. В прямоугольном базисе $x0y$ дана точка P и вектор $\vec{a}$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно вектору $\vec{a}$:

1) $P\ (1;\ 2)$, $\vec{a}=(1;\ -3)$; 2) $P\ (-4;\ 3)$, $\vec{a}=(2;\ 8)$;

3) $P\ (-1;\ -4)$, $\vec{a}=(0;\ -3)$; 4) $P\ (0;\ -1)$, $\vec{a}=(4;\ 0)$.

84. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

1) $A\ (-3;\ 2)$, $M_1\ (1;\ 5)$, $M_2\ (2;\ 6)$;

2) $A\ (1;\ -7)$, $M_1\ (0;\ 4)$, $M_2\ (-3;\ 2)$.

85. Составьте уравнение прямой, проходящей через данные точки M_1 и M_2:

1) $M_1\ (-1;\ 3)$, $M_2\ (4;\ 5)$; 2) $M_1\ (6;\ 2)$, $M_2\ (7;\ -1)$;

3) $M_1\ (3;\ -2)$, $M_2\ (-3;\ 5)$; 4) $M_1\ (6;\ 0)$, $M_2\ (6;\ 1)$.

86. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку K и перпендикулярной к вектору $\vec{b}$:

1) $K\ (0;\ 2)$, $\vec{b}=(-1;\ 4)$; 2) $K\ (2;\ -1)$, $\vec{b}=(4;\ -3)$;

3) $K\ (3;\ -2)$, $\vec{b}=(0;\ 1)$; 4) $K\ (-1;\ -2)$, $\vec{b}=(2;\ 0)$.

87. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной к прямой, проходящей через две точки C_1 и C_2:

1) $B(-1;\ 3)$, $C_1(4;\ 5)$, $C_2(-4;\ 2)$; 2) $B(2;\ -4)$, $C_1(6;\ 2)$, $C_2(1;\ 7)$;

3) $B(12;\ 5)$, $C_1(4;\ 8)$, $C_2(4;\ 3)$; 4) $B(-1;\ -7)$, $C_1(2;\ 3)$, $C_2(5;\ 3)$.

88. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A и отстоящей на одинаковое расстояние от точек B и C:

1) $A(-2;\ 5)$, $B(2;\ 4)$, $C(-4;\ 6)$. 2) $A(2;\ -1)$, $B(-1;\ 5)$, $C(3;\ 7)$.

89. Определите координаты ортогональной проекции точки P на прямую l:

1) $P\ (2;\ 4)$, l: $9x-12y-20=0$; 2) $P\ (1;\ -1)$, l: $x+3y-1=0$.

90. Определите координаты точки M, симметричной точке P относительно прямой l:

1) $P\ (3;\ 6)$, l: $2x+5y-7=0$; 2) $P\ (5;\ -11)$, l: $x-4y+2=0$.

91. Найдите расстояние от точки P до прямой l:

1) $P\ (-1;\ 3)$, l: $5x-12y-13=0$;

2) $P\ (2;\ -4)$, l: $8x+15y+17=0$.

92. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку M и имеет нормальный вектор $\vec{n}$:

1) $M\ (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{n}=(5;\ 4;\ -2)$; 2) $M\ (0;\ 2;\ -3)$, $\vec{n}=(-1;\ 2;\ 0)$;

3) $M\ (-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{n}=(3;\ 0;\ 0)$; 4) $M\ (0;\ 0;\ 1)$, $\vec{n}=(0;\ 0;\ -3)$.

93. Даны точки P_1 и P_2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку K перпендикулярно вектору $\overrightarrow{P_1P_2}$:

1) $P_1\ (0;\ 2;\ -5)$, $P_2\ (3;\ -1;\ 8)$, $K\ (3;\ 1;\ 0)$;

2) $P_1\ (-1;\ 0;\ -8)$, $P_2\ (1;\ 2;\ -3)$, $K\ (-2;\ 7;\ 6)$.

94. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно векторам $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$:

1) $A\ (1;\ 3;\ 5)$, $\vec{b}_1\ (1;\ -1;\ 5)$, $\vec{b}_2\ (-4;\ 3;\ 0)$;

2) $A\ (3;\ -1;\ -2)$, $\vec{b}_2\ (0;\ 5;\ 1)$, $\vec{b}_2=(2;\ -3;\ 0)$.

95. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки K_1 и K_2 параллельно вектору $\vec{c}$:

1) $K_1\ (-3;\ 7;\ 1)$, $K_2\ (-2;\ 8;\ 1)$, $\vec{c}=(1;\ 0;\ 5)$;

2) $K_1\ (7;\ -3;\ -1)$, $K_2\ (7;\ 1;\ 0)$, $\vec{c}=(0;\ -5;\ 1)$.

96. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки A, B, C:

1) $A\ (5;\ -6;\ 1)$, $B\ (1;\ 8;\ 0)$, $C\ (0;\ 2;\ 0)$;

2) $A\ (0;\ -1;\ 0)$, $B\ (2;\ 0;\ 1)$, $C\ (-1;\ 1;\ 8)$.

97. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку N параллельно плоскости α:

1) $N\ (4;\ 0;\ -1)$, $\alpha:\ 3x-y+5z-1=0$;

2) $N\ (-4;\ 2;\ 0)$, $\alpha:\ x+y-8z+1=0$.

98. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку L перпендикулярно к двум плоскостям α и β:

1) $L\ (2;\ 0;\ -3)$, $\alpha:\ 5x-y+z-1=0$, $\beta:\ x+2z-1=0$;

2) $L\ (-1;\ 1;\ 0)$, $\alpha:\ y-4z+2=0$, $\beta:\ x-3y+z-1=0$.

99. Найдите расстояние от точки P до плоскости α:

1) $P\ (;\ 2;\ 1)$, $\alpha:\ 3x-4y-12z+26=0$;

2) $P\ (0;\ 3;\ 1)$, $\alpha:\ 2x-y+2z-9=0$.

100. Найдите расстояние между параллельными плоскостями α и β:

1) $\alpha:\ 6x-3y-2z-14=0$, $\beta:\ 6x-3y-2z+4=0$;

2) $\alpha:\ x+2y+2z-27=0$, $\beta:\ x+2y+2z-10=0$.

101. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно вектору $\vec{a}$:

1) $P\ (7;\ -1;\ 2)$, $\vec{a}=(-2;\ 1;\ 3)$; 2) $P\ (1;\ 0;\ -1)$, $\vec{a}=(4;\ 3;\ -2)$.

102. Составьте уравнение прямой, которая проходит через две данные точки M_1 и M_2:

1) $M_1\ (3;\ 6;\ -1)$, $M_2\ (4;\ 6;\ 2)$; 2) $M_1\ (1;\ -2;\ -3)$, $M_2\ (2;\ 3;\ 4)$.

103. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Докажите, что l параллельна вектору $\vec{c}$, если:

1) $l:\ \begin{cases}3x-y+2z-1=0,\\ x+2y-z+3=0,\end{cases}$ $\vec{c}=(-3;\ 5;\ 7)$;

2) $l:\ \begin{cases}x-2y+2z-2=0,\\ 3x-2y+5z-1=0,\end{cases}$ $\vec{c}=(-6;\ 1;\ 4)$.

104. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к плоскости α:

1) $D\ (-8;\ 0;\ 5)$, $\alpha:\ 4x-y+8z-3=0$;

2) $D\ (1;\ 7;\ 15)$, $\alpha:\ -x+y-10z=0$.

105. Определите величину угла между прямыми l_1 и l_2:

1) $l_1:\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{6}$, $l_2:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$;

2) $l_1:\ \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$, $l_2:\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$;

3) $l_1:\ \begin{cases}3x-y+5z-4=0,\\ 2x+y-3=0,\end{cases}$ $l_2:\ \dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$;

4) $l_1:\ \begin{cases}x+y-z+11=0;\\ x-y+z-1=0,\end{cases}$ $l_2:\ \begin{cases}x-y-z+1=0,\\ x+y+z-1=0.\end{cases}$

106. Определите величину угла между прямой l и плоскостью α:

1) $l:\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, $\alpha:\ 5x-y+2z+1=0$;

2) $l:\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{2}$, $\alpha:\ x+2y-z-4=0$.

107. Определите величину угла между плоскостями α и β:

1) $\alpha:\ 2x-y+5z-3=0$, $\beta:\ x-3y+4z+20=0$;

2) $\alpha:\ 3x+2y-z=0$, $\beta:\ x-4z+1=0$.

Глава II

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Проверьте равенства:

1. 1) $2\cos 0°+32\sin 90°+4\,\mathrm{tg}\,180°=5$. 2) $\mathrm{tg}\,45°\cdot\sin 60°\cdot\mathrm{ctg}\,30°=1{,}5$.

3) $\cos\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\,\dfrac{3\pi}{4}-2\sin\dfrac{4\pi}{3}=1$.

4) $\cos\dfrac{\pi}{3}+2\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\pi}{3}=3$.

5) $\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\dfrac{3\pi}{4}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$.

6) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{4}{3}\pi-\sin^2\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{4}$.

Докажите тождества или проверьте равенства:

2. 1) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$. 2) $1-\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha=0$.

3) $\frac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{tg}x=\operatorname{cosec}^2 x$. 4) $\sin\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$.

5) $\frac{1}{\cos^2\varphi}-\operatorname{tg}^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$. 6) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}=-\sin^2\alpha$.

7) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+1$.

8) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1$.

3. 1) $\sin(180°-x)=\sin x$. 2) $\cos(90°+x)=-\sin x$.

3) $\operatorname{ctg}(\pi+x)=\operatorname{ctg}x$. 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\operatorname{ctg}x$.

5) $\sin 1365°=-\sin 15°$. 6) $\cos 918°=-\cos 18°$.

7) $\sin 9{,}75\pi=\cos 0{,}25\pi$. 8) $\operatorname{tg}9{,}7\pi=-\operatorname{ctg}0{,}2\pi$.

9) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$. 10) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

11) $\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$. 12) $\operatorname{tg}(45°+\alpha)=\operatorname{ctg}(45°-\alpha)$.

13) $\operatorname{tg}(45°-\alpha)\operatorname{tg}(45°+\alpha)=1$. 14) $\operatorname{ctg}(\alpha-100°)=-\operatorname{tg}(170°+\alpha)$.

15) $$\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-\sin^3\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\sin^2\alpha.$$

16) $$\frac{\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4\alpha)-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)}{4\sin(5\pi-3\alpha)\cos(\alpha-2\pi)}=\cos 2\alpha.$$

4. 1) $\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\sin 1{,}5x$.

2) $\sin 65°\cdot\sin 55°+\cos 65°\cdot\cos 55°=\cos 10°$.

3) $\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{21}-\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{21}=0{,}5$.

4) $\sin 1\cdot\cos 2+\cos 1\cdot\sin 2=\sin 3$. 5) $\cos 20°+\operatorname{tg}10°\cdot\sin 20°=1$.

6) $\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$. 7) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha$.

8) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. 9) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45°+\alpha)$.

10) $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45°-\alpha)$. 11) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}=1$.

12) $\frac{\operatorname{tg}(45°+\alpha)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}(45°+\alpha)\operatorname{tg}\alpha}=1$.

5. 1) $2\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}$. 2) $2\cos^2 22{,}5°-2\sin^2 22{,}5°=\sqrt{2}$.

3) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$. 4) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

5) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$. 6) $\operatorname{ctg}\alpha(1-\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$.

7) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. 8) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

9) $1+2\cos 7\alpha=\frac{\sin 10{,}5\alpha}{\sin 3{,}5\alpha}$. 10) $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos 8\alpha\cdot\operatorname{ctg}4\alpha=\sin 8\alpha$.

11) $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$. 12) $8\cos 10°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°=\operatorname{ctg}10°$.

6. 1) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 2) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

3) $1+\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. 4) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

5) $\frac{1+\sin 2\alpha-\cos\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$. 6) $\frac{1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

7. 1) $\sin 28°+\sin 12°=2\sin 20°\cos 8°$.

2) $\cos 16°-\cos 36°=2\sin 26°\cdot\sin 10°$.

3) $\sin 20°+\cos 20°=\sqrt{2}\cos 25°$. 4) $\cos 40°+\sin 40°=\sqrt{2}\cos 5°$.

5) $\frac{\sin 110°-\sin 10°}{\cos 110°+\cos 10°}=\operatorname{tg}50°$. 6) $\frac{\cos 54°-\cos 6°}{\sin 84°-\sin 36°}=-1$.

7) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+60°)$.

8) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. 9) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

10) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2{,}5\alpha$.

8. 1) $\cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ = \frac{1}{2}(\cos 10^\circ + \cos 20^\circ)$.

2) $\sin 23^\circ \cdot \sin 32^\circ = \frac{1}{2}(\cos 9^\circ - \cos 55^\circ)$.

3) $\cos 3 \cdot \sin 2 = \frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1)$. 4) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$.

9. $\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$. **10.** $\cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

11. $16\sin^2\alpha\cos^3\alpha = 2\cos\alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha$.

12. $32\sin^5\alpha\cdot\cos^3\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 4\alpha - \frac{1}{2}\sin 6\alpha + \frac{1}{4}\sin 8\alpha$.

13. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2} = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

14. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{5\alpha}{2} = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

15. $16\cos 10^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ = 1$.

16. $16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ = 3$.

17. $\frac{\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

18. $\sqrt{2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)\right) = \sin 2\alpha$.

19. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ\cdot\cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

20. $\left(\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{4} - 1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\pi}{4} + 1} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg} 4\alpha\right)\sec\frac{9}{2}\alpha = \operatorname{cosec} 4\alpha$.

21. $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}{1 - 8\sin^2\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha}{2}$. **22.** $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

23. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + 8\operatorname{tg} 8\alpha + 16\operatorname{tg} 16\alpha + 32\operatorname{ctg} 32\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

24. $\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) = 1$.

Упростите:

25. $\frac{\cos 12^\circ}{1 - \sin 12^\circ}$. **26.** $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$. **27.** $\sqrt{1 - \cos\alpha}$. **28.** $\sqrt{1 + \cos 2\alpha}$.

29. $\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} - \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$. **30.** $\frac{\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}}$.

Найдите суммы:

31. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in z$.

32. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in z$.

Преобразуйте в произведение:

33. $\cos 16^\circ + \sin 56^\circ + \sin 50^\circ$. **34.** $1 - \sin\alpha + \cos\alpha$.

35. $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$. **36.** $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

37. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)$. **38.** $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha\cdot\operatorname{ctg} 4\alpha$.

Вычислите:

39. $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, $|\sin\alpha - \cos\alpha|$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

40. $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

41. $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$, $0 < \alpha < \pi$.

42. $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

43. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

44. $\cos(\alpha - 2\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = -2$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

45. $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Вычислите без таблиц:

46. $\cos 75^\circ$. **47.** $\cos 67^\circ 30'$. **48.** $\sin 15^\circ$. **49.** $\cos 15^\circ$. **50.** $\frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{2\operatorname{ctg} 15^\circ}$.

51. $(2\cos 40° - \cos 20°)\operatorname{cosec} 20°$. 52. $\sin 18°$. 53. $\cos 10° \cdot \cos 50° \cdot \cos 70°$.

54. $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 80°$. 55. $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 80°$.

56. $\operatorname{tg}^2 36° \cdot \operatorname{tg}^2 75°$. 57. $\dfrac{96 \sin 80° \cdot \sin 65° \cdot \sin 35°}{\sin 20° + \sin 50° + \sin 110°}$.

§ 2. Графики тригонометрических функций

Найдите область определения, область значений и наименьший положительный период функций:

58. $y = \sin 2x$. 59. $y = \cos 3x$. 60. $y = 2\sin\dfrac{x}{3}$. 61. $y = -3\cos\dfrac{x}{2}$.

62. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. 63. $y = \operatorname{ctg} 3x$. 64. $y = \sin(\pi x)$. 65. $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$.

66. $y = \sin x + \cos x$. 67. $y = \sin 2x - \cos 2x$.

Докажите непериодичность функций:

68. $y = \cos\sqrt{x}$. 69. $y = \sin x^2$. 70. $y = \sin\sqrt{|x|}$.

71. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

$$y = \sin x + \cos x + 3.$$

Постройте графики функций:

72. $y = \sin 2x$. 73. $y = \sin\left(-\dfrac{x}{3}\right)$. 74. $y = 2\cos(-3x)$.

75. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. 76. $y = 3\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. 77. $y = \dfrac{1}{2}\cos(x+2)$.

78. $y = 3\sin(2x - 4)$. 79. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3$. 80. $y = |\sin x|$.

81. $y = \sin|x|$. 82. $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$. 83. $y = \dfrac{|\cos x|}{\sin x}$. 84. $y = \dfrac{1}{\sin x}$.

85. $y = -\dfrac{1}{\cos x}$. 86. $y = \sin^2 x$. 87. $y = \sqrt{\sin x}$. 88. $y = \sin x + |\sin x|$.

89. $y = \cos x - |\cos x|$. 90. $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. 91. $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

92. $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. 93. $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$. 94. $y = x + \sin x$. 95. $y = x^2 \sin x$.

Постройте графики уравнений:

96. $|y| = \sin x$. 97. $\sin y = \sin x$.

§ 3. Производные тригонометрических функций

Найдите производные следующих функций:

98. $\sin 2x$. 99. $\cos(-3x)$. 100. $\operatorname{tg} 4x$. 101. $\operatorname{ctg} 5x$. 102. $\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

103. $\cos\dfrac{x}{5}$. 104. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. 105. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{7}$. 106. $\sin(1 - 3x)$.

107. $\cos(2 - 6x)$. 108. $\operatorname{tg}(1 - 4x)$. 109. $\operatorname{ctg}(8x^2 - x)$.

Напишите уравнение касательной к графику функций:

110. $y = 2\sin\dfrac{x}{5}$ в точке $x = \dfrac{3\pi}{2}$. 111. $y = 2\cos\dfrac{x}{2}$ в точке $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

112. $y = \cos^2 x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$. 113. $y = \operatorname{tg} 2x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{8}$.

Найдите критические точки функций:

114. $y = 3x + 3\sin x + \cos 5$.

115. $y = (2\sqrt{2} - 1)(\cos x + 1) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)x$.

116. $y = \cos^2 x - \sqrt{x^2} + \operatorname{arctg} 2$. 117. $y = \sin^2 x + \sqrt{x^2} + \sin^2 3$.

118. $y = \arcsin\dfrac{x}{2} + \arccos\dfrac{x}{2} + \pi$.

119. $y = 11\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x\right) - \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{9} - 27x$.

120. $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2\sin 6 - x\sin 4\sin 8 - \dfrac{5}{2}\pi$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

121. $y = \sin x + \cos x + 3$. 122. $y = -x + \sin 2x$ на $[0;\ \pi]$.

123. $y = x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ на $[\pi;\ 2\pi]$.

§ 4. Обратные тригонометрические функции

Вычислите:

124. $\operatorname{arctg} 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

125. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Найдите область определения функций:

126. $y = \arcsin(2 - x)$. 127. $y = \arcsin(x^2 - 2)$. 128. $y = \arccos\frac{x}{x^2+1}$.

129. $y = \arcsin(\cos x)$.

Докажите:

130. $\sin(\arcsin x) = x,\ \ -1 \le x \le 1$. 131. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},\ \ -1 \le x \le 1$.

132. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 133. $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

134. $\cos(\arccos x) = x,\ \ -1 \le x \le 1$. 135. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\ \ -1 \le x \le 1$.

136. $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 137. $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

138. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ -1 < x < 1;\ \ \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{7-x^2}}{x},\ \ x \ne 0$.

139. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x},\ \ x \ne 0$.

140. $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ -1 < x < 1;\ \ \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \ x \ne 0$.

Вычислите:

141. $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$. 142. $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$. 143. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

144. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$. 145. $\cos(\operatorname{arctg} 2)$. 146. $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{21}{29}\right)$.

147. $\sin(\arccos(-0{,}28))$. 148. $\operatorname{tg}(\arccos(-0{,}28))$. 149. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

150. $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$. 151. $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$. 152. $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$.

153. $\sin\left(3\arcsin\frac{3}{5}\right)$. 154. $\cos\left(3\arccos\frac{4}{5}\right)$. 155. $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$.

156. $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5\right)$. 157. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$. 158. $\cos\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}\right)$.

159. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$. 160. $\cos\left(\arccos\frac{1}{3} + \arcsin\frac{2}{3}\right)$.

161. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{4}{5} - \operatorname{arctg}\frac{2}{5}\right)$.

Докажите, что

162. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ и $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2},\ \ 0 \le x \le 1$.

163. $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ 0 \le x < 1$.

164. $\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ \ 0 < x \le 1$.

165. $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ при $x > 0$.

166. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \ x > 0$.

Выразите через все обратные тригонометрические функции:

167. $\arcsin\frac{3}{5}$. 168. $\arccos\frac{12}{13}$. 169. $\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$. 170. $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$.

Докажите, что

171. $\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ \ -1 \le x \le 1$. 172. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

173. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ \ -1 \le x \le 1$. 174. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Выразите через все обратные тригонометрические функции:

175. $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$. 176. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. 177. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$. 178. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{24}\right)$.

Докажите, что при $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$:

179. $\arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$.

180. $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$.

181. $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$.

182. $\arccos x - \arccos y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right)$.

183. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$, $x>0$, $y>0$.

184. $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-xy}{x+y}$, $x>0$, $y>0$.

Докажите, что

185. $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{12}{13} = \arccos\left(-\dfrac{16}{65}\right)$.

186. $\arccos\dfrac{7}{25} + \arccos\dfrac{3}{5} = \arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

187. $\arcsin\dfrac{3}{5} - \arcsin\dfrac{24}{25} = -\arcsin\dfrac{3}{5}$.

188. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$. 189. $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg} 1$.

190. $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg}\dfrac{2}{11}$. 191. $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{32}{43}$.

192. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

193. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$. 194. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решите уравнения:

195. $3\operatorname{arctg} x + 5\operatorname{arcctg} x = 2\pi$. 196. $4\arcsin x + \arccos x = \pi$.

Найдите, при каких целых значениях k системы имеют решения, и найдите все эти решения:

197. $\begin{cases} \arccos x + (\arcsin y)^2 = k\dfrac{\pi^2}{4}, \\ (\arcsin y)^2 \arccos x = \dfrac{\pi^2}{16}. \end{cases}$ 198. $\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = k\pi^2, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

199. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3.$$

Вычислите:

200. $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$. 201. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{10\pi}{7}\right)$. 202. $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)\right)$.

203. $\arccos(\sin x)$ при $x=3$; $x=4$; $x=10$.

Постройте графики функций:

204. $y = \arcsin x$. 205. $y = \arcsin(x+2)$. 206. $y = \arccos x$. 207. $y = \operatorname{arctg} x$.

208. $y = \operatorname{arcctg} x$. 209. $y = \sin(\arcsin x)$. 210. $y = \cos(\arcsin x)$.

211. $y = \arcsin(\sin x)$. 212. $y = \arcsin(\cos x)$. 213. $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1-x))$.

214. $y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$. 215. $y = \arccos\dfrac{1}{x^2}$.

Решите уравнения:

216. $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 8 = 0$. 217. $\operatorname{arctg}^2\dfrac{x}{3} - 4\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} - 5 = 0$.

218. $\operatorname{arctg}^2(3x+2) + 2\operatorname{arctg}(3x+2) = 0$. 219. $3\operatorname{arctg}^2 x - 4\pi\operatorname{arctg} x + \pi^2 = 0$.

220. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$. 221. $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

222. $\arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. 223. $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \arccos(2x^2-1)$.

224. $2\arccos x = \arccos(2x^2-1)$. 225. $2\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Решите неравенства:

226. $\arcsin x \le 4$. 227. $\arcsin x \ge -1{,}8$. 228. $\arccos x \le \arccos\dfrac{1}{4}$.

229. $\arccos x > \dfrac{\pi}{6}$. 230. $\operatorname{arctg} x > -\dfrac{\pi}{3}$. 231. $\operatorname{arcctg} x > 2$.

§ 5. Тригонометрические уравнения

Решите уравнения:

232. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 233. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. 234. $\sin x = 0$. 235. $\sin x = -1$.

236. $\sin x = \frac{\pi}{2}$. 237. $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 238. $\cos x = \frac{1}{2}$. 239. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

240. $\cos x = 0$. 241. $\cos x = -1$. 242. $\cos x = 1$. 243. $\cos x = -\frac{1}{5}$.

244. $\cos x = 1 - \sqrt{5}$. 245. $\cos 6x = \frac{1}{3}$. 246. $\operatorname{tg} x = 1$. 247. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

248. $\operatorname{tg} x = -10$. 249. $\operatorname{ctg} 3x = 5$. 250. $\sin(2x - 5) = 1$. 251. $\operatorname{ctg}(3x + 4) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решите однородные уравнения:

252. $\cos x + \sin x = 0$. 253. $\sin x - \cos x = 0$.

254. $3\cos x + 2\sin x = 0$. 255. $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

256. $2\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 1$. 257. $2\sin^2 x - \sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$.

258. $\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. 259. $\sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$.

Решите уравнения, используя формулы сложения:

260. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 261. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$.

262. $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 263. $\cos 2x - \sin 2x = -\sqrt{2}$.

264. $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = -1$. 265. $\frac{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x} = 1$.

Решите уравнения, преобразуя сумму и разность тригонометрических функций в произведение:

266. $\sin 3x - \sin x = 0$. 267. $\cos 2x - \cos 4x = 0$.

268. $\sin x - \cos 3x = 0$. 269. $\cos\frac{x}{3} - \sin x = 0$.

270. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$. 271. $\sin(\pi\sqrt{x}) + \sin \pi x = 0$.

272. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

273. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Решите уравнения:

274. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 5x$. 275. $\sqrt{3}\sin 4x + 2\cos 2x + \cos 4x = 0$.

276. $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x = 1$. 277. $\operatorname{ctg} x \sin 2x - \cos 2x = 1$.

278. $2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x$.

279. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3x + \operatorname{tg} 4x$.

Решите уравнения, преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму:

280. $\cos x \cos 5x = \cos 3x \cos 7x$. 281. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

282. $2\sin 5x \sin 2x = \cos x$. 283. $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$.

284. $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$.

285. $4\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3x = 1$.

Решите уравнения, используя формулы $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ и $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$:

286. $2\sin^2 x = 1$. 287. $2\cos^2 x = 1$.

288. $\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$. 289. $2\sin^2 x - 1 = \sin 3x$.

290. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$. 291. $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

292. $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$. 293. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$.

294. $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$. 295. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

296. $\sin x - 2\cos 2x = 1$. 297. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$.

Решите уравнения, приведя их к квадратным уравнениям относительно какой-либо тригонометрической функции:

298. $5 - 7\sin x = 3\cos^2 x$. 299. $\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$.

300. $\sin x + \operatorname{cosec} x = \frac{7}{2\sqrt{3}}$. 301. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

302. $\sec^4 x = \operatorname{tg}^4 x + 7$. 303. $\operatorname{cosec}^2 x = 4\operatorname{ctg} x - 2$.

304. $1 + \sin 2x = 6\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. 305. $1 - \sin 2x = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

306. $\sin^4 x + 2\cos^2 x - a^2 = 0$. 307. $a\sin^2 x + \cos x = 0$.

Решите уравнения, используя формулы для синуса, косинуса и тангенса двойного и тройного углов:

308. $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$.

309. $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

310. $(\cos 2x - 1)\operatorname{ctg}^2 x = -3\sin x$.

311. $\cos x + \cos 2x = \sin x$.

312. $\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0$.

313. $3\sin x + 3\cos x = \cos 3x - \sin 3x$.

314. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$.

315. $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

316. $\sin\frac{3}{2}x + 3\sin x = 3\sin\frac{x}{2}$.

317. $\sin 3x + \sin 2x - m\sin x = 0$.

318. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(60° - x)\operatorname{tg}(60° + x) = 1$.

319. $a\sin\frac{x}{2} - \left(\sin x + \sin\frac{3}{2}x\right) = 0$.

Решите уравнения, выражая все тригонометрические функции, входящие в уравнение, через тангенс половинного угла (метод универсальной тригонометрической подстановки):

320. $\sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$.

321. $1 + \cos x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$.

322. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$.

323. $4\sin 2x + 3\cos 2x = 5$.

324. $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$.

325. $1 + \cos x - \sin x = 0$.

Решите уравнения с помощью введения вспомогательного аргумента:

326. $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

327. $\sin x + \cos x = a$.

328. $3\sin x + 4\cos x = -5$.

329. $\sin 2x + 7\cos 2x = 5$.

330. $12\cos x - 5\sin x = 13\sin 3x$.

331. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$.

Решите уравнения, используя ограниченность тригонометрических функций синуса и косинуса:

332. $\cos 10x - \cos 7x = 2$.

333. $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

334. $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$.

335. $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$.

336. $\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 2x} = 1$.

Решите уравнения:

337. $\sin x - \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

338. $\sin x + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

339. $(1 - \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$.

340. $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

341. $4\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 10x = \frac{3}{2}$.

342. $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$.

343. $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$.

344. $\frac{3}{2} - \sin 2x = \sqrt{9 + 10\sin 2x}$.

345. $\sqrt{37 - 48\operatorname{ctg} x} = 8\operatorname{ctg} x - 5$.

346. $4\sin 3x + 3 = \sqrt{2\sin 3x + 2}$.

347. $\sqrt{6 - \sin x - 7\cos^2 x} + \sin x = 0$.

348. $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}$.

349. $\sin^2 x \operatorname{ctg} 2x = 0$.

350. $\sin 6x \operatorname{ctg} 4x \operatorname{tg} 3x = 0$.

351. $(\sin x + \cos x)^2 = \operatorname{tg} x \cos 2x$.

352. $\sin x = 2\cos^3 x$.

353. $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x - 2\sin x$.

354. $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$.

355. $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$.

356. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$.

357. $3\sin^2 2x - 4\sin x \sin 3x + 4\cos 2x + 4\cos^2 x = 0$.

358. $2\cos^3 x - \cos x \cos 2x = \sin x$.

359. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 8\operatorname{ctg}^2 2x$.

360. $\cos 4x + 5\cos 2x + 3 = \sin 3x$.

361. $\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{8}$.

362. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

363. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$.

364. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

365. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$.

366. $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$.

367. $2\cos 13x + 3\cos 3x + 3\cos 5x - 8\cos x \cos^3 4x = 0$.

368. $\sin 3x + \cos 2x = 1$.

369. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$.

370. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$.

371. $\sin x = \cos\sqrt{x}$.

372. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$.

373. $\operatorname{tg} x^2 = \operatorname{ctg} 5x$.

374. $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos y=3+\cos 2y$. 375. $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5$.

376. $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$. 377. $\sin^6 x+\cos^6 x=a$.

378. $\sin^4 x+2\cos^2 x-a^2=0$. 379. $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$.

380. $\sin^6 x+\cos^6 x=a(\sin^4 x+\cos^4 x)$. 381. $3\cos x\sin x-\sin^2 x=a$.

382. Найдите все решения уравнения $1-5\sin x+2\cos^2 x=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x\ge 0$.

383. Найдите все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения $2\sin^7 x-(1-a)\sin^3 x+(2a^3-2a-1)\sin x=0$ является корнем уравнения $2\sin^8 x+\cos 2x=1+a-2a^3+a\cos^2 x$.

§ 6. Системы тригонометрических уравнений

Решите системы уравнений:

384. $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=1.\end{cases}$ 385. $\begin{cases}\cos(x+y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos(x-y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ 386. $\begin{cases}\sin(x-y)=\dfrac{1}{2},\\ \sin(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

387. $\begin{cases}\sin x+\sin y=0,\\ \sin x\sin y=-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$ 388. $\begin{cases}\cos x+\cos y=1,\\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$ 389. $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3},\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$

390. $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1.\end{cases}$ 391. $\begin{cases}\cos x-\sin y=1,\\ \cos^2 x-\sin^2 y=1.\end{cases}$ 392. $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{2},\\ \cos x\sin y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

393. $\begin{cases}\cos x\cos y=1,\\ \sin x\sin y=0.\end{cases}$ 394. $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{1}{4},\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ 395. $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{3},\\ \sin x+\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

396. $\begin{cases}\cos x+\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ x-y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ 397. $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ x+y=\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$

398. $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 x=1.\end{cases}$ 399. $\begin{cases}x^2+2x\sin y+3\cos y=0,\\ \arcsin\left(\dfrac{x}{2}+\sin y\right)=y-\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

400. $\begin{cases}x^2\operatorname{tg}^2 y(\operatorname{tg}^2 y-2)=1-2x,\\ \operatorname{arctg}(x\operatorname{tg}y)=2y.\end{cases}$ 401. $\begin{cases}1+2\cos 2x=0,\\ \sqrt{6}\cos y-4\sin x=2\sqrt{3}(1+\sin^2 y).\end{cases}$

§ 7. Тригонометрические неравенства

Решите неравенства:

402. $\sin x>0$. 403. $\sin x<0$. 404. $\sin x\le\dfrac{1}{2}$. 405. $\sin x>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

406. $\sin x\le -1$. 407. $\sin x>\dfrac{1}{3}$. 408. $\cos x>0$. 409. $\cos x<0$.

410. $\cos x\ge\dfrac{1}{2}$. 411. $\cos x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 412. $\cos x\ge 1$. 413. $\operatorname{tg}x>0$.

414. $\operatorname{tg}x<0$. 415. $\operatorname{tg}x\ge 1$. 416. $\operatorname{tg}x<-\sqrt{3}$. 417. $\sin x+\sqrt{3}\cos x>0$.

418. $\operatorname{tg}^2 x-(1+\sqrt{3})\operatorname{tg}x+\sqrt{3}<0$. 419. $|\operatorname{tg}x|>|\operatorname{tg}2x|$.

420. $\sqrt{5-2x}\ge 6\sin x-1$. 421. $\sin x<|\cos x|$.

Найдите область определения функции:

422. $y=\sqrt{5\sin x-1}$. 423. $y=\sqrt{2\sin\dfrac{x}{2}}$. 424. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4\cos x+1}}$.

425. $y=\sqrt{\sin^2 x-\sin x}$. 426. $y=\sqrt{-2\cos^2 x+3\cos x-1}$.

427. $y=\log_2(\cos x-\sin x)$.

Глава III

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Треугольник. Подобие треугольников. Площадь треугольника

1. Докажите, что если в треугольнике две медианы равны, то он равнобедренный.

2. Докажите, что сумма длин высот треугольника меньше его периметра.

3. Докажите, что сумма длин медиан треугольника меньше периметра и больше 3/4 периметра.

4. Докажите, что в подобных треугольниках отношение двух соответственных сторон равно отношению двух соответственных: а) высот, б) биссектрис, в) медиан.

5. Докажите, что треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда одна из его сторон вдвое больше медианы, проведенной к этой стороне.

6. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину треугольника с произвольной точкой противоположной стороны, делится средней линией треугольника пополам (средней линией, параллельной этой стороне).

7. Докажите, что если высота треугольника является в то же время биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

8. Докажите, что если медиана треугольника является в то же время и биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

9. В правильном треугольнике длина стороны основания равна a. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри треугольника, до сторон треугольника постоянна. Найдите ее значение.

10. Докажите, что в любом треугольнике ABC $AB \neq BC$ основание биссектрисы лежит между основанием высоты и медианы, проведенных из угла B.

11. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Докажите, что AD – биссектриса угла BAC.

12. В треугольнике ABC угол при вершине C вдвое больше угла при вершине B. CD – биссектриса угла C. Докажите, что $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$.

13. В прямоугольном треугольнике длины катетов относятся как $m:n$. Докажите, что высота, опущенная на гипотенузу, делит ее в отношении $m^2:n^2$.

14. Площадь треугольника равна s. Найдите площади шести треугольников, на которые разбивают его три медианы.

15. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE, F – точка их пересечения. Докажите, что площадь треугольника BCF равна площади четырехугольника $AEFD$.

16. Докажите, что площади треугольников, имеющих по одному одинаковому углу, относятся как произведения длин сторон, образующих этот угол.

17. На основании AC треугольника ABC взята точка E. Докажите, что $|AC| \cdot |AE| \cdot |EC| = |AB|^2 \cdot |CE| + |BC|^2 \cdot |AE| - |BE|^2 \cdot |AC|$.

18. Докажите, что если в остроугольном треугольнике провести высоты, то прямые, соединяющие основания высот, отсекают от исходного треугольника подобные треугольники.

19. В треугольнике ABC длина медианы AD равна m, длина стороны AC равна b. Найдите длину третьей стороны, если длина стороны BC в два раза больше длины медианы AD.

20. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите стороны треугольника.

21. В равностороннем треугольнике проекция медианы на боковую сторону равна a. Найдите сторону треугольника.

22. В прямоугольном треугольнике длины медиан острых углов равны a и b см. Найдите гипотенузу треугольника.

23. Стороны треугольника ABC равны $|AB| = c$, $|AC| = b$. Длина медианы CD равна m. Найдите третью сторону.

24. В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Точка D – точка пересечения его биссектрисы. В каком отношении делит точка биссектрисы треугольника?

25. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 3:2, считая от вершины. В каком отношении эта прямая делит боковые стороны?

26. В треугольнике ABC $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|AC| = 15$. Найдите радиус окружности, касающейся сторон AB, BC, если ее центр лежит на стороне AC.

27. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, а длина биссектрисы угла при основании равна b. Найдите длины сторон треугольника.

28. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и через точку D проведена прямая, параллельная AC, пересекающая сторону AB в точке E. Найдите длину отрезка ED и отношение периметров треугольников ABC и BED, если $|AB| = b$, $|AC| = a$.

29. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $|AD|:|AC| = k$ и проведена медиана AE. В каком отношении точка пересечения $[BD]$ и $[AE]$ делит отрезок AE?

30. Найдите площадь треугольника, если длины двух сторон равны 7 и 5 см соответственно, а длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 4 см.

31. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины A прямого угла проведена высота AD. Расстояния от точки D до катетов треугольника равны a и b. Найдите катеты треугольника и его площадь.

32. В треугольнике ABC проведены медианы AP и BQ, пересекающиеся в точке R. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки P, Q, R. Длина медианы CT равна m. Найдите длину AB.

33. Длины медиан треугольника равны 3, 4, 5. Найдите площадь треугольника.

34. В треугольнике ABC на медиане BD взята точка E так, что $|BE|:|ED| = \alpha$. Через точки A и E проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M. Найдите $|BM|:|MC|$.

35. В треугольнике ABC медиана AD перпендикулярна медиане BE. Найдите площадь треугольника, если $|AD| = a$, $|BE| = b$.

36. На медиане NK треугольника MNL взята точка P так, что $|PK| = \frac{1}{4}|NK|$. Прямая MP пересекает сторону NL в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $KPQL$, если площадь треугольника MNL равна S.

37. В треугольнике ABC $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|AC| = 5$. Найдите угол BAC.

38. Найдите угол треугольника, если длины заключающих его сторон равны a и b, а биссектриса угла равна l.

39. В треугольнике ABC величина угла при вершине A равна α. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной из вершины A, если $|AB| = c$, $|AC| = b$.

40. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD, а на продолжении стороны AB за точку B взята точка E так, что $|AB| = |BE|$. Найдите площадь треугольника ADE, если площадь треугольника ABC равна s, и $|AB|:|BC| = k$.

§ 2. Многоугольники. Подобие многоугольников. Площадь

1. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра, но больше полупериметра.

2. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике диагонали лежат на биссектрисах его углов, то такой четырехугольник есть ромб.

3. Докажите, что если диагонали четырехугольника конгруэнтны и служат биссектрисами его углов, то такой четырехугольник — квадрат.

4. Докажите, что выпуклый четырехугольник, у которого диагонали точкой пересечения делятся пополам, есть параллелограмм.

5. Докажите, что всякий параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, есть ромб.

6. Докажите, что если а) углы при одном основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная, б) диагонали трапеции равны, то она равнобедренная, в) отрезок, соединяющий серединные точки оснований, перпендикулярен основаниям, то трапеция равнобедренная.

7. Докажите, что диагонали трапеции точкой их пересечения не делятся пополам.

8. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.

9. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника как на сходственных сторонах построены подобные многоугольники. Докажите, что сумма площадей многоугольников, построенных на катетах, равна площади многоугольника, построенного на гипотенузе.

10. В трапеции $ABCD$ ($[BC] \parallel [AD]$) проведены диагонали, пересекающиеся в точке O. Докажите, что если точка O равноудалена от боковых сторон, то трапеция равнобедренная.

11. Докажите, что если прямая, пересекающая параллельные стороны трапеции, делит ее на равновеликие части, то она проходит через середину средней линии трапеции.

12. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

13. Пусть O – произвольная точка плоскости и $ABCD$ – прямоугольник. Докажите, что $|OA|^2 + |OC|^2 = |OB|^2 + |OD|^2$.

14. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного многоугольника, до прямых, содержащих его стороны, равна произведению апофемы многоугольника на число его сторон.

15. Докажите, что сумма квадратов длин всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей.

16. Длина средней линии трапеции равна m. Диагонали трапеции высекают на средней линии отрезок длиной n. Найдите длины оснований трапеции.

17. Диагонали трапеции пересекают среднюю линию в точках M и N. Найдите меньшее основание трапеции, если длина большего основания a, а длина отрезка $MN = b$ $(a > 2b)$.

18. Боковые стороны трапеции равны соответственно a и b $(a < b)$, большее основание равно c. Найдите длину меньшего основания трапеции.

19. В каком отношении делят площадь трапеции ее диагонали, если они высекают от средней линии отрезок, длина которого равна k-й части длины средней линии?

20. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны l_1 и l_2. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

21. В прямоугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины на диагональ, делит прямой угол на части в отношении 1:3. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

22. Стороны параллелограмма в два раза больше сторон прямоугольника, а площади их совпадают. Найдите острый угол параллелограмма.

23. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если длины оснований a и b.

24. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Определите площадь ромба, если площадь треугольника равна Q, а стороны треугольника, заключающие общий угол, относятся как $m : n$.

25. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащие основаниями, равны s_1 и s_2. Найдите площадь трапеции.

§ 3. Окружность. Свойства хорд и касательных. Площадь круга и его частей

1. Докажите, что величина угла, вписанного в окружность, равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

2. Докажите, что величина угла, образованного касательной и хордой, которые имеют общую точку на окружности, равна половине угловой величины дуги, заключенной между его сторонами.

3. Докажите, что величина угла с вершиной внутри круга равна полусумме угловых величин дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.

4. Докажите, что величина угла, образованного двумя секущими с вершиной вне круга, равна полуразности угловых величин дуг, заключенных между сторонами угла.

5. Через точку M, лежащую внутри круга, проведены две хорды AB и CD. Докажите, что $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$.

6. Докажите, что если из точки к окружности проведены две касательные, то 1) длины отрезков касательных от этой точки до точек касания равны; 2) прямая, проходящая через центр окружности и эту точку, делит угол между касательными пополам.

7. Докажите, что если через точки пересечения двух окружностей провести прямые, пересекающие эти окружности, и полученные точки на каждой из окружностей соединить хордами, то последние параллельны.

8. К окружности проведены три касательные; две из них параллельны. Докажите, что отрезок третьей касательной, отсекаемый параллельными касательными, виден из центра окружности под прямым углом.

9. Докажите, что если из произвольной точки, лежащей вне данной окружности, проведены две секущие, то произведения длины каждой из секущей на длину ее внешней части равны. Чему равно это произведение?

10. Две окружности произвольных радиусов касаются внешним образом в точке M. К ним проведена общая внешняя касательная. Точки A и B – точки касания окружностей с касательной. Докажите, что треугольник AMB – прямоугольный.

11. Точка M движется по окружности с центром в точке O. Пусть N – проекция точки на данный неподвижный диаметр. Докажите, что биссектриса угла OMN проходит через неподвижную точку. Какую?

12. Через точку A касания двух окружностей проведена секущая BAD, пересекающая окружности в точках B и D. Докажите, что радиусы, проведенные в точки B и D, параллельны.

13. Три окружности внешне касаются друг друга. Центрами их служат вершины треугольника ABC со сторонами a, b и c. Найдите радиусы этих окружностей.

14. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найдите длину отрезка общей касательной, заключенного между точками касания.

15. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная и в полученный криволинейный треугольник вписана окружность. Найдите радиус последней, если радиусы исходных окружностей равны r_1 и r_2.

16. Окружность проходит через вершины A, B, C трапеции $ABCD$ и касается стороны CD в точке C. Найдите длину диагонали AC, если длины оснований трапеции a и b.

17. Из точки A проведены к окружности радиуса R две касательные. Найдите длины касательных, если расстояние между точками касания равно a.

18. Через точку A, удаленную от центра окружности на расстояние a, проведена секущая AB, которая разделилась окружностью пополам. Определите длину секущей AB, если радиус окружности R.

19. Прямоугольный сектор разделен на две части дугой окружности того же радиуса с центром в конце дуги. Радиус окружности, вписанной в часть сектора, имеющую меньшую площадь, равен r. Найдите радиус сектора.

20. Из точки A проведены к окружности две касательные длины a. На меньшей дуге, определяемой точками касания, взята точка M и через нее проведена третья касательная, пересекающая первые две в точках B и C. Найдите периметр треугольника ABC.

21. Площади полукругов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равны S_1 и S_2. Найдите площадь полукруга, построенного на гипотенузе.

22. Через концы диаметра AB окружности проведены касательная AC и секущая BC, пересекающая окружность в точке D. В каком отношении делит секущую BC точка D, если $|AC|$ в k раз больше радиуса окружности?

23. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции $ABND$, если $|AB| = 9$ и $|AD| = 8$.

24. В круговой сектор, дуга которого содержит 120°, вписан круг. Найдите отношение площади этого круга к площади сектора.

25. В угол вписаны две окружности радиусов R и r $(R > r)$, касающиеся друг друга. Найдите величину угла.

§ 4. Вписанные и описанные многоугольники

1. Докажите, что если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на его высоте, то треугольник равнобедренный.

2. Докажите, что если центр окружности, описанной вокруг треугольника, лежит на стороне, то треугольник прямоугольный.

3. Докажите, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны.

4. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы вокруг четырехугольника можно было описать окружность.

5. В треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ, пересекающиеся в точке O. Покажите, что вершина C лежит на окружности, проходящей через точки P, Q, O.

6. В окружность вписан треугольник ABC. Докажите, что высота треугольника, проведенная из вершины угла A, параллельна прямой, проходящей через центр окружности и точку пересечения окружности с биссектрисой угла A.

7. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, и BD – высота, опущенная из вершины B. Докажите, что биссектриса угла ABC делит угол OBD пополам.

8. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Докажите, что длина высоты треугольника, проведенной из точки A, есть среднее пропорциональное между длинами отрезков перпендикуляров, опущенных из точек B и C на касательную к окружности в точке A.

9. Докажите, что если два треугольника вписаны в окружность и имеют общее основание, то произведения других сторон пропорциональны высотам, опущенным на общее основание.

10. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Докажите, что половина произведения катетов равна произведению отрезков гипотенузы, полученных делением гипотенузы точкой касания.

11. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна полусумме катетов.

12. Докажите, что если вокруг трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобочная.

13. Докажите, что если в трапецию можно вписать окружность и описать окружность вокруг нее, то длина боковой стороны равна длине средней линии.

14. В треугольнике ABC BD – высота и $|BC| = a$, $|AB| = c$, $|BD| = h$. Докажите, что радиус описанной окружности R равен $\dfrac{ac}{2h}$.

15. В многоугольник, величина полупериметра которого равна P, а величина площади – S, вписан круг. Докажите, что радиус круга равен S/P.

16. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника, S – площадь и R – радиус описанной окружности. Докажите, что $abc = 4RS$.

17. Докажите, что периметры равновеликих многоугольников обратно пропорциональны радиусам вписанных в них окружностей.

18. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники, относятся как длины сходственных сторон и периметров.

19. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с углом $\hat{B} = 36°$. Из вершины угла A проведена биссектриса, пересекающая окружность в точке D. Докажите, что отрезок BD – сторона правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

20. В треугольнике ABC дано: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Найдите радиус описанной окружности.

21. Дан треугольник ABC со сторонами $|AB| = 10$, $|BC| = 17$, $|AC| = 21$ см. Найдите: 1) площадь треугольника; 2) радиус вписанной окружности; 3) радиус описанной окружности; 4) длину высоты, опущенной на AB.

22. Сторона правильного многоугольника равна a. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

23. Найдите сторону правильного многоугольника, если известны:

1) R – радиус описанной окружности;

2) r – радиус вписанной окружности.

24. Радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник, равен r. Найдите радиус описанной окружности.

25. Сторона правильного n-угольника равна a. Вокруг него описана окружность. Найдите сторону правильного n-угольника, описанного около этой окружности.

26. Определите площадь правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R.

27. Во сколько раз площадь треугольника, вписанного в круг, меньше площади квадрата, описанного около круга?

28. Длины сторон треугольника относятся как 2:3:4. В нем проведена биссектриса среднего по величине угла. В каком отношении, считая от вершины, она делится центром окружности, вписанной в этот треугольник?

29. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найдите отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности.

30. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности,

проходящей через точки K, L, M. Длина медианы CN равна m. Найдите длину стороны AB.

31. В треугольнике ABC длина $|AC| = a$ и радиус окружности, проходящей через вершины A, C и центр окружности, которая вписана в треугольник, равен R. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC. При каких R и b задача разрешима?

32. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите длины сторон параллелограмма.

33. Около окружности описана трапеция с боковыми сторонами длины l, m. Найдите сумму квадратов расстояний от центра окружности до вершин трапеции.

34. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r, а описанной R. Найдите площадь треугольника.

35. Периметр равнобочной трапеции, описанной около круга, равен p. Найдите длину средней линии трапеции.

36. В равнобочную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится на отрезки a и b. Найдите площадь трапеции.

37. Стороны основания равнобедренной трапеции равны 3 см и 9 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

38. Длины диагоналей ромба относятся как $p:q$. Найдите отношение площади ромба к площади круга, вписанного в него.

39. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, $|AB| = a$. Из конца диаметра, параллельного стороне AB, сторона BC видна под углом α. Найдите радиус окружности.

40. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности относится к его гипотенузе как 1:5. Найдите отношение катетов данного треугольника.

41. Величины углов треугольника относятся как 2:3:7. Наименьшая сторона треугольника равна a. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

42. В прямоугольном треугольнике ABC из прямого угла A опущен перпендикуляр AD на гипотенузу BC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC равны r_1 и r_2 соответственно.

43. Радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника, равен R. Найдите сторону треугольника и его площадь.

44. В треугольник KMN вписана окружность радиуса r, касающаяся сторон KN и MN в точках P и Q, причем $|KP|:|PN| = 1/2$, $|MQ|:|QN| = 3/5$. Найдите длину стороны KN, если площадь треугольника равна S.

45. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на нижнем основании. Длина боковой стороны равна m, а длина диагонали n $(n > m)$. Найдите длины оснований трапеции.

46. Точка D лежит на стороне AC правильного треугольника ABC. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и ABC, если площадь треугольника ABD относится к площади треугольника ABC как 1:3.

47. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, D и E, если $|AC| = a$ и $\angle ABC = \varphi$.

48. Боковая сторона равнобедренной трапеции видна из центра описанной окружности под углом 2β, а диагональ трапеции равна a. Найдите площадь трапеции.

49. Даны две стороны треугольника a и b и угол φ между ними. Найдите радиус окружности, проведенной через концы третьей стороны, и центр вписанного в этот треугольник круга.

50. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$.

51. Длина стороны треугольника равна a, и величины углов, прилежащих к данной стороне, равны α и β. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, и площадь треугольника.

52. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен R, а углы при одной из сторон равны α и β. Найдите сторону квадрата, равновеликого данному треугольнику.

53. Основания равнобочной трапеции соответственно равны l и m $(l > m)$, угол при большем основании равен φ. Найдите площадь круга, описанного около трапеции.

54. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC, если угол BAC равен α.

55. Найдите отношение периметра трапеции, описанной около окружности, к длине этой окружности, если углы при большем основании равны α и β.

§ 5. Разные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC на основании AC взята точка D. Пусть точка A_1 симметрична точке D относительно прямой AB и точка C_1 симметрична точке D относительно прямой BC. Докажите, что площадь треугольника BC_1A_1 минимальная тогда, когда BD – высота треугольника ABC.

2. Докажите, что произведения расстояний от любой точки окружности, описанной около выпуклого четырехугольника, до его противоположных сторон или их продолжений равны между собой.

3. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ внутренне касаются. Определите длину стороны правильного треугольника, одна из вершин которого находится в точке касания окружностей, вторая вершина – на внешней, а третья – на внутренней окружности.

4. Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противолежащую боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

5. В треугольнике ABC, $|AB| = |BC|$ и $\angle BAC = \alpha$. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен r. Через точку A и центр вписанного круга проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите длину отрезка AD.

6. В равнобедренный треугольник ABC $(|AB| = |BC|)$ вписана окружность, касающаяся сторон AB и BC в точках D и E соответственно. На меньшей части дуги DE взята точка M и через нее проведена касательная, пересекающая стороны треугольника в точках F и G. Найдите радиус окружности и периметр треугольника BFG, если $|AB| = 10$, $|AC| = 12$.

7. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, зная, что угол $\angle ABC = \beta$ и $\angle CAB = \alpha$.

8. На основании BC трапеции $ABCD$, как на диаметре, построена окружность радиуса R, которая проходит через середины диагоналей и касается основания AD. Найдите периметр трапеции.

9. В треугольнике ABC угол при вершине C равен α. Через точку E, лежащую на основании, проведена прямая под углом β к стороне AC и пересекающая сторону BC в точке D. Найдите отношение площадей треугольников EDC и ABC, если $|AE| : |EC| = 1:2$ и $|AC| = |BC|$.

10. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

11. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла $O\hat{A}K$ равна $\pi/3$, Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

12. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB имеет длину a и образует с катетом AC угол α. Точка D расположена на гипотенузе AB и имеет наименьшую по сравнению с другими точками отрезка AB сумму квадратов расстояний до прямых AC и BC. Найдите площадь правильного треугольника, построенного на AD как на стороне.

13. В трапеции длина меньшего основания равна длинам боковых сторон. При каком значении угла при большем основании площадь трапеции будет наибольшей?

14. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна a. Найдите минимум суммы квадратов всех сторон параллелограмма.

15. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC величина угла при основании AC равна α, а длина боковой стороны равна a. Точка M расположена на отрезке BC и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка BC сумму квадратов расстояний до прямых AC и AB. Найдите длину отрезка MC.

16. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен α, а длина боковой стороны равна b. Точка M лежит на высоте BD и имеет наименьшую по сравнению с остальными

точками высоты BD сумму квадратов расстояний до вершин треугольника ABC. Найдите площадь треугольника AMC.

17. В равнобедренном треугольнике ABC величина угла при основании AC равна α, длина боковой стороны a. Через точку M, лежащую на боковой стороне, проведены две прямые, параллельные сторонам треугольника, отрезающие от треугольника ABC параллелограмм наибольшей площади. Найдите площадь этого параллелограмма.

18. Дана окружность радиуса R с диаметром AD. Окружность с центром в точке A пересекает первую в точке B, а диаметр AD – в точке C. При каком значении радиуса второй окружности длина отрезка BC будет наибольшей?

§ 6. Задачи на построение

Простейшие задачи

1. Данный отрезок разделите пополам.

2. К данному отрезку AB восстановите перпендикуляр в данной на нем точке M.

3. Из внешней точки M опустите перпендикуляр на прямую AB.

4. При данной точке M на прямой AB постройте угол, равный заданному.

5. Постройте угол, равный сумме и разности двух заданных углов.

6. Заданный угол разделите пополам.

7. Через точку M проведите прямую, параллельную заданной прямой AB.

8. Проведите прямую на расстоянии, равном "b" от заданной прямой.

9. Разделите отрезок на m равных частей (в частном случае $m = 3$).

10. Данный отрезок разделите в отношении $m:n$.

11. Постройте треугольник, зная середины его сторон.

12. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

13. Постройте квадрат: 1) по двум вершинам; 2) по серединным точкам двух противолежащих сторон; 3) по серединным точкам двух прилежащих сторон; 4) по центру и точке на одной из сторон.

14. Постройте трапецию $ABCD$ $([AD] \,||\, [BC])$ по следующим элементам: 1) $|AD|$, $|AB|$, $|CD|$ и $\hat{A}$; 2) $|AD|$, $|AB|$, $|CD|$ и $|BD|$; 3) $|AD|$, $\hat{A}$, $\hat{D}$ и $|BC|$; 4) $|AD|$, $|BC|$, $|AC|$ и $|BD|$.

15. Постройте ромб по данным диагоналям. Постройте параллелограмм по диагонали, основанию и углу между ними.

16. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$ $([AD] \,||\, [BC])$ по следующим элементам: 1) $|AD|$, $|AB|$, $\hat{A}$; 2) $|AD|$, $|BC|$, $|AB|$; 3) $|AD|$, $|AB|$, $|AC|$; 4) $|AD|$, $|BC|$ и высота h.

17. Постройте окружность, если даны только три точки этой окружности.

18. Постройте окружность, проходящую через вершину данного угла и отсекающую от его сторон хорды данной длины.

19. Постройте окружность данного радиуса R, проходящую через две данные точки.

20. 1). Дан треугольник. Постройте равновеликий ему параллелограмм; 2). Дан параллелограмм. Постройте равновеликий ему треугольник.

Применение метода геометрических мест и метода симметрии

1. Найдите точку, находящуюся на расстоянии a от прямой AB и на расстоянии b от прямой CD.

2. Постройте окружность, касательную к сторонам данного угла, причем к одной из сторон в заданной точке.

3. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

4. К данной окружности проведите касательную из заданной внешней точки.

5. Постройте окружность данного радиуса так, чтобы она проходила через данную точку и центр ее лежал бы на данной прямой.

6. Через данную точку M проведите окружность, касательную к данной окружности O в данной на ней точке L.

7. Дана прямая l и точки A и B вне ее. Найдите на прямой l такую точку C, чтобы угол ABC был прямым. Сколько решений может иметь задача?

8. Постройте треугольник по стороне, противоположной углу и высоте, проведенной к одной из двух других сторон.

9. К двум окружностям проведите общую касательную.

10. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

11. К двум заданным окружностям проведите общую касательную.

12. Из данных точек A и B проведите две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой MN пополам.

13. В данный угол впишите треугольник, имеющий наименьший периметр, одна из вершин которого находится в заданной точке.

14. На прямой AB найдите точку, сумма расстояний которой от двух данных точек M и N была бы наименьшей.

15. На данной прямой AB найдите точку M, соединив которую с данными точками P и Q, получим углы $\angle PMB$ и $\angle QMA$, из которых один вдвое больше другого.

Применение метода подобия

1. Постройте треугольник по данному углу, отношению сторон, образующих этот угол, и: 1) медиане, проведенной к третьей стороне; 2) высоте, проведенной к третьей стороне.

2. Постройте треугольник по двум данным углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

3. Постройте прямоугольный треугольник: 1) по данному отношению его катетов и гипотенузе; 2) по данному отношению одного катета к гипотенузе и второму катету; 3) по отношению его катетов и высоте, опущенной на гипотенузу.

4. Постройте ромб по данному отношению диагоналей к данной стороне.

5. Постройте параллелограмм по отношению диагоналей, углу между диагоналями и стороне.

6. В данный треугольник впишите прямоугольник с данным отношением сторон так, чтобы две вершины прямоугольника лежали на боковых сторонах треугольника, а две другие – на его основании.

7. В данный ромб впишите квадрат так, чтобы на каждой из сторон ромба лежала вершина квадрата.

8. Через точку, данную внутри угла, проведите прямую так, чтобы отрезок прямой, отсекаемый сторонами угла, делился этой точкой в данном отношении $m:n$.

9. В данный угол впишите окружность, проходящую через данную внутри угла точку.

10. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы стороны ромба были параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины ромба лежали бы на сторонах параллелограмма.

11. Постройте трапецию по двум углам, прилежащим к одному основанию, этому основанию и отношению его к высоте.

12. Постройте трапецию, если даны: отношение ее оснований, два угла при одном из этих оснований и высота.

13. В данный сектор (фигуру, ограниченную двумя радиусами и дугой) впишите квадрат так, чтобы две вершины его лежали на дуге, а две остальные – по одной на каждом из данных радиусов.

14. Впишите в данную окружность треугольник, подобный данному.

15. Постройте треугольник по углу, высоте, опущенной из этого угла, и периметру.

16. Постройте треугольник по углу, отношению прилежащих сторон и радиусу вписанной окружности.

17. Постройте треугольник по углу A, высоте, опущенной из этого угла, и отношению прилежащих сторон.

18. Постройте треугольник по двум углам и периметру.

Разные задачи на построение

1. Постройте прямоугольный треугольник; 1) по катету и медиане, проведенной к гипотенузе; 2) по катету и медиане, проведенной к другому катету; 3) по катету и медиане, проведенной к нему.

2. Постройте прямоугольник: 1) по диагонали и углу между диагоналями; 2) по стороне и сумме диагоналей, 3) по диагонали и сумме прилежащих сторон.

3. Постойте квадрат: 1) по сумме диагонали и стороны, 2) по разности диагонали и стороны.

4. Даны отрезки длины a, b, c. Постройте отрезок длины x, где:

1) $x = \dfrac{ac}{b}$; 2) $x = \sqrt{ab}$; 3) $x = \dfrac{a^2}{b}$; 4) $x = \dfrac{(a+c)^2}{a}$;

5) $x = a\sqrt{2}$; 6) $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$.

5. Постройте правильный треугольник, зная радиус описанной (вписанной) окружности.

6. Постройте равносторонний треугольник, зная сумму длин высоты и радиуса описанной окружности.

7. На стороне AC треугольника ABC найдите точку M такую, что $|AM| \cdot |MC| = |AB|^2$.

8. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.

9. Постройте треугольник по углу, прилежащей стороне и сумме (или разности) двух других сторон.

10. Постройте параллелограмм по диагоналям и острому углу.

11. Постройте треугольник, зная сторону, противолежащий угол и медиану, проведенную к этой стороне.

12. Постройте параллелограмм по стороне, углу и диагонали.

13. Постройте параллелограмм по двум сторонам и высоте.

14. Постройте треугольник по стороне, одному прилежащему углу и медиане, проведенной к этой стороне.

15. Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и биссектрисе этого угла.

16. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине.

17. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

18. Постройте прямоугольный треугольник по катету и проекции другого катета на гипотенузу.

19. Постройте треугольник по углу, биссектрисе этого угла и отношению отрезков противоположной стороны, на которые ее делит высота из данного угла.

20. В заданный треугольник впишите параллелограмм с заданным острым углом.

21. Дана окружность и на ней три различные точки, в которых с этой окружностью пересекаются продолжения высоты, биссектрисы и медианы, исходящих из одной вершины вписанного в эту окружность треугольника. Постройте этот треугольник.

22. Постройте треугольник по трем медианам.

23. Постройте треугольник ABC по высоте (медиане) BD и радиусам окружностей, описанных вокруг треугольника ABD и BDC.

Глава IV

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. Точка, прямая, плоскость. Многогранники (простейшие задачи)

1. Точка O – центр прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см, (OB) – прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная плоскости прямоугольника. Найдите расстояние от точки B до вершин прямоугольника, если $|OB| = 2\sqrt{6}$ см.

2. Из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр и две наклонные, пересекающие плоскость α в точках B, C, D соответственно. Отрезки $[AC]$ и $[AD]$ составляют с плоскостью α углы 45° и 30°. Найдите длины отрезков $[BD]$ и $[BC]$, если $|AB| = 8$ см.

3. В треугольнике ABC длины сторон AC и CB равны 6 см и 3 см соответственно, угол $A\hat{C}B$ равен 120°, $[CM]$ – биссектриса угла $A\hat{C}B$. Отрезок $[NC]$ перпендикулярен плоскости треугольника, причем $|CN| = 4$ см. Найди длину отрезка $[NM]$.

4. $[KM_1]$ – проекция отрезка $[KM]$ на плоскость α, $p \in [KM]$, $|KP| : |PM| = 1:3$. Найдите расстояние от точки P до плоскости α, если $|MM_1| = 12$ см.

5. Точки A и B удалены от плоскости α на расстояние 4 см и 8 см. Точка P принадлежит отрезку $[AB]$, причем $|AP| : |PB| = 1:2$. Найдите расстояние от точки P до плоскости α.

6. Через сторону AB прямоугольника $ABCD$ проведена плоскость. Проекция прямоугольника $ABCD$ на эту плоскость – квадрат. Найдите расстояние от прямой (CD) до этой плоскости, если $|AB| = 6$ см, $|BC| = 8$ см.

7. Ортогональная проекция равнобедренного треугольника ABC на плоскость, проходящую через основание AB, – равносторонний треугольник ABD. Найдите расстояние от точки C до этой плоскости, если $|AB| = 7$ см, $|AC| = |BC| = 12$ см.

8. Длины отрезков двух прямых, заключенных между параллельными плоскостями, относятся как 2:3, а их углы с одной из плоскостей соответственно как 2:1. Определите эти углы.

9. Из точки M, отстоящей от плоскости α на 6 см, приведены к плоскости две наклонные MA и MB ($A \in \alpha$, $B \in \alpha$), образующие с плоскостью углы в 45°, а между собой угол в 30°. Найдите $|AB|$.

10. Длина стороны ромба с острым углом в 60° равна 10 см. Через одну из сторон проведена плоскость; длина проекции другой стороны на эту плоскость равна 8 см. Найдите длины проекций диагоналей.

11. Из точки P, удаленной от плоскости β на расстояние 8 см, проведены к плоскости β наклонные PQ и PR ($Q \in \beta$, $R \in \beta$), образующие с плоскостью β углы в 45° и 30°. Найдите угол между этими наклонными, если $|QR| = 8\sqrt{2}$.

12. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Найдите угол между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен β.

13. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, отстоящая от вершины прямого угла треугольника на 2,4 см. Найдите угол между указанной плоскостью и плоскостью треугольника, если длины катетов равны 6 см и 8 см.

14. Длины ребер тетраэдра $KLMN$ равны. Через ребро KL проведена плоскость, перпендикулярная ребру MN. Найдите величину двугранного угла, образованного этой плоскостью с плоскостью грани KLN.

15. Прямая, лежащая в одной из двух пересекающихся плоскостей, образует с линией пересечения этих плоскостей угол α. Найдите угол между этими плоскостями, если указанная прямая образует со второй плоскостью угол β.

16. A и B – точки ребра двугранного угла величиной в 60°. $[AC]$ и $[BD]$ – равные отрезки прямых, перпендикулярных ребру двугранного угла, проведенные в разных гранях. Найдите величину угла между отрезком $[CD]$ и указанными плоскостями.

17. Докажите, что непересекающиеся ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны.

18. В трехгранном угле два острых плоских угла равны. Докажите, что проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.

19. В трехгранном угле $SABC$ $B\hat{S}C = 90°$, $A\hat{S}B = A\hat{S}C = 60°$, $|SA| = l$. Найдите угол между прямой $[SA]$ и плоскостью угла BSC.

20. Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

21. Наклонные, проведенные через точку M, пересекают плоскость α в точках A и B, причем $|MA| = 8$ см, $|MB| = 5$ см. Найдите длины проекций отрезков $[MA]$ и $[MB]$ на плоскость α, если углы, образованные отрезками $[MA]$ и $[MB]$ с плоскостью α относятся как 1:2.

22. В прямоугольном параллелепипеде непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней образуют с плоскостью основания углы φ и ψ. Найдите угол между этими диагоналями.

23. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника наклонен к плоскости β, проходящей через гипотенузу, под углом 30°. Найдите угол между плоскостью β и плоскостью треугольника.

24. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Найдите величины двугранных углов этого трехгранного угла.

25. В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

26. В трехгранном угле два плоских угла равны по 60°, третий 90°. Найдите угол наклона ребра, противолежащего прямому плоскому углу, к плоскости этого угла.

27. В трехгранном угле величины плоских углов равны α, β, γ. Найдите величины двугранных углов.

28. В правильной треугольной пирамиде величина плоского угла при вершине равна α. Определите величину угла, образованного боковыми гранями и плоскостью основания.

29. В правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

30. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен β. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

31. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания и двугранный угол при боковом ребре.

32. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, длина стороны основания – a. Найдите высоту пирамиды.

33. Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной шестиугольной пирамиды равен α. Найдите двугранный угол между смежными боковыми гранями.

34. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен α. Найдите высоту пирамиды, если сторона основания пирамиды равна a.

35. Найдите величину угла между противоположными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если угол между противоположными боковыми ребрами пирамиды равен φ.

36. Найдите длину апофемы боковой грани правильной треугольной пирамиды, если длина стороны основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен β.

37. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны. Определите углы между плоскостями: 1) SAB и SDE; 2) SAB и SBC.

38. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $|AA_1| = |AB|$. Найдите угол между диагональю AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

39. Основание пирамиды – квадрат. Двугранные углы, образуемые боковыми гранями с плоскостью основания, относятся как 1:2:4:2 Найдите величины этих двугранных углов.

40. Длина каждого ребра тетраэдра равна a. Найдите расстояние между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра.

41. В правильной треугольной пирамиде длина сторон основания равна a, а длина каждого бокового ребра равна l. Найдите расстояние между серединами скрещивающихся ребер пирамиды.

42. В прямоугольном параллелепипеде длины ребер равны a, b, c. Найдите расстояние от одной из вершин параллелепипеда до середины граней, не проходящих через эту вершину.

43. Найдите острый угол между двумя высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

44. Каждое из ребер тетраэдра $SABC$ равно a. Найдите расстояние между $[AB]$ и $[SC]$.

§ 2. Многогранники (площадь поверхности, объем)

1. Докажите эквивалентность следующих утверждений: 1) боковые ребра пирамиды равны; 2) боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания; 3) около основания пирамиды можно описать окружность, и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

2. Докажите эквивалентность следующих утверждений: 1) двугранные углы при основании пирамиды равны; 2) высоты боковых граней равны; 3) высота пирамиды образует одинаковые углы с боковыми гранями; 4) в основании пирамиды можно вписать окружность, и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

3. Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с параллельными сторонами длиной 2 и 10 см, острый угол трапеции равен 60°, угол между диагональю призмы и плоскостью основания равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

4. Стороны основания прямого параллелепипеда 4 см и 7 см, угол между ними равен 45°. Диагональ меньшей грани равна 5 см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

5. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α, радиус окружности, вписанной в основание, равен r. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

6. Основанием треугольной пирамиды служит равнобедренный треугольник со стороной основания a, и острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

7. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом при основании величины α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания пирамиды равен R.

8. Радиус окружности, описанной вокруг основания правильной четырехугольной пирамиды, равен R, все плоские углы при вершине пирамиды равны α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

9. Две боковое грани наклонной треугольной призмы образуют угол 60°, расстояния от их общего ребра до остальных боковых ребер равны 5 дм и 10 дм, боковое ребро равно 8 дм. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

10. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, длина диагонали которого l, а острый угол между диагоналями равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если все боковые грани наклонены к плоскости основания пирамиды под углом φ.

11. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и имеет длину h. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

12. Длина апофемы правильной шестиугольной пирамиды равна l. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

13. Основание прямой призмы – равносторонний треугольник с длиной радиуса вписанной окружности – r. Диагонали боковой грани образуют острый угол φ. Найдите объем призмы.

14. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом 60° и большей диагональю d см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

15. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 13, 14, 15 см. Диагональ большей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы.

16. Длина диагонали правильной четырехугольной призмы равна l, диагональ образует с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы.

17. В основании прямой призмы лежит параллелограмм, длины диагоналей которого равны l_1 и l_2 $(l_2 < l_1)$, а угол между ними φ. Найдите объем призмы, если меньшая диагональ призмы составляет угол α с плоскостью основания.

18. В наклонной треугольной призме две боковые грани образуют острый угол α, их общее ребро равно l и находится на расстоянии a и b от остальных ребер. Найдите объем призмы.

19. Найдите объем правильного тетраэдра, все ребра которого равны a.

20. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R.

21. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α и площадью S. Боковая грань, проходящая через катет, прилежащий данному углу, перпендикулярна плоскости основания. Две другие грани образуют с основанием равные углы φ. Найдите объем пирамиды.

22. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 9 см. Все боковые ребра равны 13 см. Найдите объем пирамиды.

23. Основанием пирамиды служит треугольник, длина одной из сторон которого равна a, а прилежащие углы α и β. Найдите объем пирамиды, если боковые ребра пирамиды составляют с высотой равные углы φ.

24. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, боковые грани образуют с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды.

25. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого боковые грани, проходящие через катеты, перпендикулярны плоскости основания. Наклонные боковые ребра имеют длину 2 и 3 см и составляют с плоскостью основания углы, которые относятся как 2:1. Найдите объем пирамиды.

26. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, высота пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды.

27. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат с длиной стороны основания a. Прямые AS и CS составляют с плоскостью основания углы α и β. Найдите объем пирамиды, если $|BS| = |DS|$.

28. В правильной четырехугольной пирамиде длина апофемы боковой грани равна l, а величина угла, образованного боковыми ребрами, которые проходят через противоположные вершины квадрата, лежащего в основании, равна β. Найдите объем пирамиды.

29. Основание четырехугольной пирамиды – трапеция с боковой стороной 10 см и основаниями 2 и 14 см. Боковые ребра пирамиды имеют длину 10 см. Найдите объем пирамиды.

30. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды, если длина стороны ромба равна a.

31. Основанием пирамиды служит трапеция, боковая сторона которой и меньшее основание равны a, а острый угол – γ. Боковые ребра образуют с высотой равные углы φ. Найдите объем пирамиды.

32. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, боковые грани образуют с основанием угол 45°. Найдите объем пирамиды.

33. Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и b $(a > b)$, а боковые грани наклонены к плоскости большего основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

§ 3. Сечения многогранников

1. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, походящей через вершины A, C и точку M ребра $[A_1B_1]$.

2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины ребер CC_1 и A_1D_1.

3. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину A_1 и точки M и N, принадлежащие ребрам $[AB]$ и $[B_1C_1]$.

4. Постройте сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через точку пересечения медиан основания параллельной одной из боковых граней. В каком отношении делит объем призмы эта плоскость?

5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра $[B_1C_1]$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через 1) M и $[DC]$; 2) M и $[AD]$.

6. Постройте сечение четырехугольной призмы, проходящей через три точки, лежащие на разных боковых ребрах.

7. Постройте сечение правильного тетраэдра $SABC$ плоскостью, которая проходит через середину $[SA]$, перпендикулярна грани SBC и параллельна (BC).

8. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через ребро DC и точку пересечения медиан грани ACB. Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно a.

9. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки, принадлежащие ее боковым ребрам.

10. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы, проходящее через меньшую диагональ нижнего основания и наиболее удаленную от нее вершину верхнего основания. Найдите площадь полученного сечения, если сторона основания призмы равна a и боковое ребро призмы равно b.

11. Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, содержащей медиану CH грани ABC и параллельной прямой AD. Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно a.

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины сторон основания равны $|AB| = 3$ дм, $|BC| = 8$ см. Длина бокового ребра $|AA_1| = 5$ дм. На ребре $[BC]$ взята точка M так, что $|BM| : |MC| = 3:1$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и ребро AA_1.

13. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противолежащее боковое ребро. Найдите площадь сечения, если секущая плоскость образует с плоскостью основания угол α, а сторона основания равна a.

14. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, высота призмы равна h. Найдите площадь сечения призмы, проведенного через середины двух смежных сторон основания и центр симметрии призмы.

15. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Стороны основания равны a. Найдите площадь получившегося сечения.

16. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с острым углом α, описанная около круга R. Через боковую сторону нижнего основания и противоположную вершину острого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью нижнего основания двугранный угол величиной φ. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

17. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания длины a проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения пирамиды.

18. Через середины смежных сторон квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, проведена плоскость, параллельная боковому ребру пирамиды, выходящему из этой же вершины. В каком отношении делит секущая плоскость объем пирамиды?

19. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 дм, верхнего – 5 дм, а высота – 3 дм.

Через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения и двугранный угол между полученным сечением и плоскостью основания.

20. Через точку пересечения медиан основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость под углом β к плоскости основания и пересекающая только одно боковое ребро пирамиды. Найдите площадь сечения, если длина стороны основания пирамиды a, и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ.

21. В прямой треугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершину A и середины ребер BB_1 и B_1C_1. Найдите отношение объемов частей, на которые сечение разделило призму.

22. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды. $SABC$ соответственно в точках M, N и P так, что $|SM|:|MA|=1$, $|SN|:|NB|=2$, $|SP|:|SC|=\frac{1}{2}$. Найдите объем пирамиды $SMNP$, если объем пирамиды $SABC$ равен V.

23. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, длина высоты пирамиды равна h. Через сторону основания пирамиды и середину бокового ребра, не пересекающегося с этой стороной, проведено сечение. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости сечения.

24. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между противоположными боковыми гранями – α. Через диагональ основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру. Найдите площадь получившегося сечения.

25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через среднюю линию основания ABC проведена плоскость, пересекающая два боковых ребра и составляющая с плоскостью основания угол β. Найдите площадь полученного сечения, если длина стороны основания пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен α.

26. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1)||(BB_1)||(CC_1)$, $|AB_1|=d$, $A\hat{B_1}B=\alpha$. На прямой, являющейся пересечением плоскости ABC и плоскости симметрии призмы, которая содержит прямую BB_1, взята точка O, которая удалена на одинаковое

расстояние от точек A, B и C. Через точку O параллельно прямой A_1C_1 проведена плоскость, пересекающая отрезок BB_1 в точке D, причем $|B_1D|:|DB|=1:2$. Найдите площадь полученного сечения, если $A\hat{B}C=\beta<\frac{\pi}{2}$.

27. В основании четырехугольной пирамиды $SKLMN$ лежит ромб $KLMN$, у которого величина острого угла при вершине K равна α. Высота пирамиды $[SO]$ проходит через точку пересечения диагоналей ромба и составляет с боковым ребром $[SK]$ угол величиной β. Через середину высоты $[SO]$ проведена плоскость, перпендикулярная к ребру $[SM]$ и пересекающая ребро$[SK]$. Найдите площадь получившегося сечения, если $|SM|=l$.

§ 4. Тела вращения. Комбинации тел вращения

1. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью: 1) проходящей через ось; 2) параллельной основанию; 3) параллельной оси; 4) пересекающей все образующие?

2. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра образует угол α с основанием развертки, длина диагонали равна d. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3. Высота цилиндра равна H, площадь сечения, проходящего на расстоянии a от оси цилиндра и параллельного оси, равна S. Найдите радиус основания цилиндра.

4. Площадь основания цилиндра равна удвоенной площади осевого сечения. Найдите величину острого угла между диагоналями осевого сечения.

5. Диагональ осевого сечения цилиндра равна l и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра и его объем.

6. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность его основания в отношении 2:3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь сечения равна S.

7. Объем цилиндра равен V, высота цилиндра равна h. Найдите площадь сечения плоскостью, параллельной оси цилиндра и отстоящей от нее на расстоянии a.

8. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом α, обращенным к образующей. Объем цилиндра равен V. Найдите радиус основания цилиндра.

9. Диагональ прямоугольника составляет с одной из сторон угол φ. Найдите отношение объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольника около каждой из смежных сторон.

10. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?

11. Угол при вершине осевого сечения конуса острый. Докажите, что любое сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, имеет площадь, не большую площади осевого сечения. Какую максимальную площадь имеет сечение в случае, если угол при вершине осевого сечения конуса тупой и длина образующей конуса L?

12. Величина центрального угла в развертке боковой поверхности конуса равна φ радиан. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

13. Радиус основания конуса R. Угол при вершине осевого сечения конуса α. Плоскость проходит через вершину конуса и пересекает основание по хорде длины a. Найдите угол между образующими конуса, по которым плоскость пересекает поверхность конуса.

14. Площадь сечения конуса плоскостью, составляющей угол в 30° с осью конуса, равна площади осевого сечения. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

15. В основании конуса хорда длины a стягивает дугу α, угол между образующей конуса и плоскостью основания равен φ. Найдите объем конуса.

16. Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно к стороне ромба. Найдите объем фигуры вращения.

17. Высота усеченного конуса равна h, радиусы оснований относятся как 1:3, угол между образующей и плоскостью основания равен 45°. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

18. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, образующая равна a и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем усеченного конуса.

19. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r.

Образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем усеченного конуса.

20. Равнобедренный треугольник, длина основания которого a, а угол при вершине 60°, вращается вокруг основания. Найдите площадь фигуры, полученной при вращении ломаной, состоящей из боковых сторон данного треугольника.

21. Составьте уравнение сферы с центром в начале координат, проходящей через точку M (1; −2; 1).

22. Составьте уравнение сферы с центром в точке O (1; 2; −1) и проходящей через точку M (3; 2; 1).

23. Докажите, что отрезки длин двух касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны.

24. Докажите, что линия пересечения двух пересекающихся сфер — окружность.

25. Докажите, что плоскость, проведенная через середину хорды сферы перпендикулярно этой хорде, проходит через центр сферы.

26. Две прямые пересекаются в точке M. Одна из них касается сферы в точке K, а другая пересекает сферу в точках N и P ($|MN| < |MP|$). Докажите, что $|MK|^2 = |MP| \cdot |MN|$.

27. Площадь поверхности шара равна S. На расстоянии a от центра шара проведена плоскость. Найдите длину линии пересечения поверхности шара и плоскости.

28. Радиус шара равен R. Найдите объем шарового сегмента, у которого высота равна R/S.

29. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите объем общей части шаров, если радиусы шаров равны R.

30. К шару радиуса R проведена касательная плоскость. Найдите площадь сечения шара плоскостью, которая проходит через точку касания и образует с касательной плоскостью угол α.

31. В шаре проведены диаметр AB и две равные хорды AM и AN, каждая под углом 30° к диаметру. Найдите угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом 60°.

32. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$). Точка E_1 — середина ребра B_1C_1. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A_1, E_1, C_1, C, если ребро куба равно a.

33. Три сферы одинакового радиуса R касаются плоскости α и каждая из сфер касается двух других. Найдите радиус четвертой сферы, касающейся плоскости α и каждой из трех данных сфер.

34. В цилиндр, вписанный в шар, вписан шар. Найдите отношение площадей поверхностей и объемов этих шаров.

35. В конус вписан цилиндр, у которого диагонали осевого сечения соответственно параллельны двум образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{6}$. Найдите объем тела, ограниченного основанием конуса и боковыми поверхностями цилиндра и конуса.

36. Дан шар радиуса R. Найдите радиус основания и длину образующей вписанного цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

37. Основания цилиндра являются сечениями шара. Найдите отношение площадей поверхностей этих фигур, если диаметр основания цилиндра и его высота имеют равные длины.

38. Шар вписан в усеченный конус. Докажите, что площадь поверхности шара меньше площади боковой поверхности конуса.

39. В конус, высота которого равна радиусу основания, вписан шар. Найдите отношение объема конуса к объему шара.

40. В конус, вписанный в сферу, вписана сфера. Найдите отношение площадей этих сфер, если угол между образующей конуса и основанием конуса равен α.

41. Длина образующей конуса равна диаметру основания. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.

42. Высота конуса в 4 раза больше радиуса шара, вписанного в этот конус. Образующая конуса равна l. Найдите боковую поверхность конуса и радиус шара, описанного около конуса.

43. В цилиндр помещен конус так, что основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра, если площадь полной поверхности конуса S.

44. Шар лежит на основании прямого кругового конуса, касаясь основания в его центре. Плоскость, образующая угол β с высотой конуса, касается шара и отсекает от окружности основания дугу с острым центральным углом величины α. Найдите радиус шара, если радиус основания цилиндра равен R.

45. Сфера с центром в вершине конуса касается его основания и делит поверхность конуса на две части, имеющие равные площади. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

46. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус, если площадь полной поверхности конуса равна S, а величина угла при вершине осевого сечения конуса равна α.

47. Площадь боковой поверхности усеченного конуса в два раза больше площади вписанной в него сферы. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания конуса.

48. Сфера вписана в усеченный конус, радиус меньшего основания которого относится к радиусу большего основания как 1:3. Найдите отношение площади сферы к площади боковой поверхности усеченного конуса.

49. Докажите, что отношение объемов шара и описанного около него усеченного конуса равно отношению площадей поверхностей этих тел.

50. Радиусы нижнего и верхнего основания усеченного конуса равны R и r, а образующие наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь поверхности шара, описанного около усеченного конуса.

51. В усеченный конус вписан шар радиусом R. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса и его объем.

52. Три шара, радиусы которых равны r, лежат на нижнем основании прямого кругового цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

§ 5. Комбинации многогранников и круглых тел

1. Докажите, что для того чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

2. Докажите, что для любой призмы, описанной около сферы, отношение площади боковой поверхности к площади основания равно 4.

3. Докажите, что все биссекторные плоскости двугранных углов треугольной пирамиды пересекаются в одной точке, и эта точка является центром вписанного в пирамиду шара.

4. Докажите, что все плоскости, проведенные через середины ребер треугольной пирамиды перпендикулярно этим ребрам, пересекаются в одной точке и эта точка является центром описанного шара.

5. Докажите, что если сфера касается всех ребер параллелепипеда, то параллелепипед является кубом.

6. Докажите, что для того чтобы вокруг пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы вокруг основания этой пирамиды можно было описать окружность. Где находится центр описанной сферы?

7. В четырехугольную усеченную пирамиду можно вписать шар. Докажите, что объемы цилиндра и шара относятся как их полные поверхности.

8. В многогранник можно вписать шар. Докажите, что $R = \frac{3V}{S}$, где R – радиус вписанного шара, V – объем многогранника, S – площадь полной поверхности многогранника.

9. Шар вписан в прямую призму, основанием которой является равнобедренный треугольник с площадью S и углом α при вершине. Найдите площадь поверхности шара.

10. В правильной шестиугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найдите: 1) отношение радиусов этих сфер; 2) величину плоского угла при вершине пирамиды.

11. В шар радиуса R вписана прямая призма, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом γ. Определите объем призмы, зная, что длина ее высоты равна $R\sqrt{3}$.

12. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые. Длины боковых ребер равны i, m, n. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

13. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами a и b, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

14. В треугольной пирамиде $SABC$ двугранные углы при ребрах AC и AB – прямые. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, если длина ребра SA равна h, ребра BC – a, а угол BAC равен α.

15. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, длина бокового ребра равна l. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около пирамиды.

16. В треугольной пирамиде $SABC$ двугранные углы при ребрах SA, AB, BC – прямые, $\widehat{SAB} = \widehat{ABC} = \alpha$. Радиус сферы, описанной около пирамиды, равен R. Найдите объем пирамиды.

17. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α, а расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно d.

18. Вокруг правильной треугольной пирамиды описан прямой круговой конус, длина образующей которого равна l. Найдите объем пирамиды, если угол при вершине осевого сечения конуса равен φ.

19. Пирамида, основанием которой служит правильный треугольник со стороной a, вписана в шар. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, третья грань образует с основанием двугранный угол φ. Найдите объем шара.

20. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетом длины a. Длины всех боковых ребер пирамиды также равны a. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

21. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α.

22. В правильный четырехугольной пирамиде величина угла между противоположными боковыми гранями равна 2α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду, равна S.

23. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ с длиной стороны, равной a. Прямые AS и CS составляют с плоскостью основания углы, величины которых равны α и β. Найдите объем шара, описанного около пирамиды, если известно, что $|BS| = |DS|$.

24. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны основания равны a и b. Найдите радиус сферы, описанной около усеченной пирамиды, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ.

25. В правильной четырехугольной пирамиде величина плоского угла при вершине равна α, а радиус вписанного шара равен R. Найдите объем пирамиды.

26. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, двугранный угол при основании равен α. Найдите объем пирамиды.

27. В правильную четырехугольную усеченную пирамиду вписан шар радиуса R. Угол наклона боковой грани к плоскости нижнего основания равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

28. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб, длина стороны которого равна b, а острый угол равен α. Через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания, составляющих острый угол, проведена плоскость, которая касается сферы. Указанная сфера касается плоскости основания в точке пересечения диагоналей ромба. Найдите радиус сферы, если известно, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и длина ее равна четверти длины меньшей диагонали ромба.

29. Диаметр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, в 6 раз больше длины отрезка, соединяющего середины противоположных сторон четырехугольника, который лежит в основании пирамиды. Определите величину угла между противоположными боковыми ребрами пирамиды, если центр сферы лежит внутри пирамиды.

30. Около прямого кругового конуса описана сфера радиуса R так, что плоскость основания конуса делит радиус, перпендикулярный к ней, в отношении 1:3 (считая от центра шара). Найдите длину диагонали куба, вписанного в конус.

31. В прямой круговой конус с образующей l и высотой h вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат конической поверхности. Найдите объем призмы, если длина стороны основания призмы равна a.

32. В конус вписана пирамиды $SABC$. Ее основание – равнобедренный треугольник $(|AB| = |AC|,\ |BC| = a,\ C\hat{A}B = \alpha)$, а боковая грань SCB наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

§ 6. Задачи по стереометрии на минимальное и максимальное значения. Разные задачи

1. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, $A\hat{B}C = 90°$, $B\hat{A}C = \alpha$, $|AC| = b$. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а угол между гранью SBC и плоскостью основания равен φ. При каком значении α объем пирамиды наибольший?

2. Периметр равнобедренного треугольника равен p. Каковы должны быть длины его сторон, чтобы объем фигуры, полученной вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

3. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объем конуса будет наибольшим? Чему равен этот объем?

4. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма. Какой должна быть сторона основания призмы, чтобы ее объем был наибольший?

5. Найдите высоту треугольной пирамиды наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

6. Найдите длину высоты конуса наименьшего объема, описанного около полушара, радиус которого R, так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

7. Объем шара равен V. В сферу, ограничивающую этот шар, вписан цилиндр наибольшей возможной площади боковой поверхности. Найдите высоту этого цилиндра.

8. В прямой круговой конус вписан шар. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания, при котором отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности конуса будет наибольшим.

9. Одно основание правильной треугольной призмы принадлежит основанию некоторой правильной треугольной пирамиды, а вершины другого основания призмы лежат на боковых ребрах пирамиды. Длины всех ребер призмы равны a. При каком значении величины угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания объем пирамиды будет наименьшим?

10. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат, так что нижнее основание параллелепипеда лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что он имеет наибольшее из возможных значение.

11. Плоскость проходит через вершину прямого кругового конуса и пересекает основание. Какова максимальная площадь полученного сечения, если высота конуса h, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α?

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ($ABCD$ – основание) $|AB| = a$, $|AS| = b$. Пирамиду пересекает плоскость α, параллельная ребрам AS и BC. На каком расстоянии от ребра AS должна быть проведена плоскость α, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длина ребра AB равна 4 см, длина ребра AD равна 6 см, длина ребра AA' равна 8 см. Точка K, лежащая на ребре AA', удалена от вершины A на 4 см. Расстояние от точки L ребра DD' до вершины D равно 2 см. Точка M лежит на отрезке $B'C$, длина MC вдвое больше длины $B'M$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

14. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где точка E является серединой ребра AA_1, точка F лежит на ребре BB_1, причем $|BF| : |FB_1| = 1/2$. Найдите объем части призмы $ABCA_1B_1C_1$, заключенной между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объем призмы равен V.

15. Диаметр сферы, описанной около прямого кругового конуса, в 9 раз больше радиуса основания конуса. Определите величину угла между осью конуса и плоскостью, проходящей через вершину конуса и отсекающей на окружности основания конуса дугу в 90°. Центр сферы лежит внутри конуса.

16. В основании пирамиды $NKLM$ лежит треугольник KLM. Прямая (KN) составляет с плоскостью основания острый угол α, а с плоскостью боковой грани (MNL) острый угол β. На ребре $[KN]$ взята точка Q такая, что $|KQ| : |QN| = 6:1$. Найдите объем пирамиды $QNLM$, если известно, что $K\hat{N}M = K\hat{N}L$, $[LM] = b$, $N\hat{K}M = N\hat{K}L$, а медиана $[ND]$ треугольника MNL имеет длину, равную a.

17. В основании пирамиды $SABCD$ лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого $[AC]$ и $[BD]$ взаимно перпендикулярны, причем $|AC| = l_1$, $|BD| = l_2$ и $|AD| = |AB|$. Прямые (AS) и (CS) составляют с плоскостью основания пирамиды углы величиной β и γ соответственно. Найдите объем пирамиды $PABCD$, если известно, что P делит высоту треугольника ASC в отношении 2:1, считая от вершины S, и что $D\hat{A}S = B\hat{A}S$.

18. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$. Через сторону основания AB проведена плоскость, пересекающая ребро D_1D так, что площадь основания призмы, площадь получившегося сечения призмы и площадь боковой поверхности призмы образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите площадь этого сечения и угол между секущей плоскостью и плоскостью нижнего основания, если радиус сферы, описанной около призмы, равен R, а величина угла между прямыми AC_1 и C_1D равна 30°.

19. В прямой круговой конус, у которого величина угла при вершине в осевом сечении равна α $\left(\alpha < \frac{\pi}{3}\right)$, вписана правильная четырехугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат конической поверхности. Найдите площадь основания призмы, если известно, что площадь полной поверхности призмы имеет наибольшее возможное значение, а радиус сферы, описанной около конуса, равен R.

20. Боковая грань KK_1M_1M треугольной призмы $KLMK_1L_1M_1$ – прямоугольник и $|KM| = a$, $|KK_1| = b$. Треугольник KLM, лежащий в основании призмы, такой, что $|KL| = |ML|$ и $L\hat{K}M = \beta$. Через ребро M_1K_1 перпендикулярно к прямой KK_1 проведена плоскость, пересекающая ребро KK_1 и разбивающая данную призму на два многогранника. Найдите объемы этих многогранников, если известно, что $M_1\hat{K}M = \alpha$, а прямая MM_1 составляет с плоскостью верхнего основания призмы $K_1L_1M_1$ острый угол α.

21. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1)\|(BB_1)\|(CC_1)$, нижним основанием которой служит правильный треугольник ABC, вписан цилиндр. На отрезке $[O_1O]$, соединяющем центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, взята точка K такая, что сумма расстояний от нее до вершин верхнего основания призмы и до центра O нижнего основания цилиндра имеет минимальное значение. Найдите объем конуса, основанием которого служит верхнее основание цилиндра, а вершина совпадает с точкой K, если $|B_1C| = d$ и $B_1\hat{C}B = \beta$ $\left(\beta > \frac{\pi}{4}\right)$.

22. На окружности с центром в точке O взяты точки A и B так, что $A\hat{O}B = \beta$. Точки A и B удалены от некоторой плоскости γ на расстояние $2C$ каждая, а точка O принадлежит этой плоскости. Найдите расстояние от точки E окружности до плоскости γ, если известно, что хорды $[AE]$ и $[BE]$ имеют одинаковые длины.

23. На боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды с вершиной S взята точка A, через которую в плоскостях боковых граней пирамиды проведены прямые, пересекающие апофемы этих граней в точках B и C и образующие углы величиной α с плоскостью основания пирамиды. Известно, что величины углов ABS и ACS равны β $\left(\beta > \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите величину угла BAC.

24. Дан трехгранный угол с вершиной O, у которого величина каждого из плоских углов равна φ. Плоскость π пересекает ребра этого трехгранного угла в точках A, B и C, причем отрезки $[OA]$ и $[OB]$ имеют равную длину, а отрезок $[OC]$ короче отрезка $[OA]$. Двугранный угол между плоскостью π и гранью OAB равен β. Два шара расположены по разные стороны плоскости так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости π. Найдите: 1) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани OAB; 2) отношение радиусов указанных шаров.

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

Вариант № 1 (1982 г.)

1. Решите неравенство: $\dfrac{1}{4^{x/2} - 5} \le \dfrac{1}{2^{x+1} - 1}$.

2. Города A и B расположены на прямолинейном шоссе. Из города A в город B одновременно выходят два пешехода, а из города B в город A в тот же момент времени выезжает велосипедист. Проехав k-ю часть пути от B до A, велосипедист встречает первого пешехода. Затем, проехав $2/3$ всего пути, велосипедист встретил второго пешехода. На каком расстоянии от них в момент их встречи находился первый пешеход? Скорости пешеходов и велосипедиста постоянны $|AB| = S$.

3. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, длина диагонали AC которого равна d, а $C\hat{A}D = \varphi$. Плоскости противоположных боковых граней ASB и CSD составляют с плоскостью основания пирамиды углы величиной α и 2α соответственно. Определите объем пирамиды, если известно, что $|AS| = |BS|$.

4. Найдите критические точки функции:

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x + 4 + (1 - a)x + \sqrt{a^2 - 7a + 6}.$$

Вариант № 2 (1982 г.)

1. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции:

$$f(x) = \cos\sqrt{x} + \sqrt{3}\left(\sin\sqrt{x} + 2\right).$$

2. Сумма цифр двузначного натурального числа A равна 14. Если к этому числу прибавить 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Найдите число A.

3. Решите неравенство: $2\log_4(x-a+1)+\log_{1/2}(x-3-2a)\geq 2$.

4. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1)\parallel(BB_1)\parallel(CC_1)$, $|AB_1|=d$ и $A\hat{B_1}B=\alpha$. На прямой, являющейся пересечением плоскости ABC и плоскости симметрии призмы, содержащей прямую BB_1, взята точка O, которая удалена на одинаковое расстояние от точек A, B и C. Через точку O параллельно прямой A_1C_1 проведена плоскость, пересекающая отрезок BB_1 в точке D, причем $|B_1D|:|DB|=1:2$. Определите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что $A\hat{B}C=\beta$.

Вариант №1 (1983 г.)

1. Решите уравнение: $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\left(\log_3(x-2)\right)=0$.

2. Решите уравнение: $2\sqrt[4]{x-a}+0{,}25(2x-1)(x-a)^{-\frac{3}{4}}=0$.

3. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB=AC$, $\hat{A}=2\alpha$ и высота AD имеет длину h. Боковая грань BB_1C_1C – прямоугольник, плоскость которого составляет с плоскостью основания призмы угол величиной φ. Через точку A_1 проведена плоскость, перпендикулярная ребру AA_1 и пересекающая призму. Найдите объем многогранников, на которые разбивает секущая плоскость призму, если $BB_1=b$.

4. Набор из одинаковых альбомов и одинаковых книг стоит 40 руб., причем цена альбома была 2 руб., а книги – 3 руб. Если бы цена альбома была k руб., книги – 3 руб., то весь набор стоил бы 39 руб. Сколько альбомов и сколько книг в наборе, если известно, что книг в нем не меньше, чем альбомов?

Вариант №2 (1983 г.)

1. Разность между произведением двадцать первого и тринадцатого членов арифметической прогрессии и произведением четырнадцатого и двадцать второго членов этой же прогрессии равна p. Определите разность этой прогрессии, если сумма ее шестнадцатого и девятнадцатого членов равна q.

2. Плоскость, проходящая через точку A бокового ребра PQ правильной треугольной пирамиды $PQRT$ и параллельная ребру TR, пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани пирамиды равна k, боковая грань PTR составляет с плоскостью основания угол величиной φ и $|AQ|=0{,}75\,|AP|$.

3. Найдите интервалы монотонного возрастания функции:

$$f(x)=(c-3)5^x-(3c+4)\left(\frac{1}{5}\right)^x+7.$$

4. Решите уравнение:

$$\left(\cos^3\frac{x}{3}\right)(2\cos x-\sin 2x)=\left(3\sin x-\frac{5}{6}\sin^2 x\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right).$$

Вариант №1 (1984 г.)

1. Решите уравнение: $1+\log_6\left(4\cos^2 x-\cos x-1\right)=\log_6(4-7\cos x)$.

2. Каждый из двух сосудов содержит водный раствор уксусной кислоты. В первом сосуде содержится 15% кислоты, а во втором – содержится 75% воды (по объему). Сколько литров каждого раствора нужно взять, чтобы, смешав их, получить 2 л нового раствора, содержащего не более q% кислоты?

3. Решите уравнение: $\sqrt{\frac{x}{4}+2}=c+\sqrt{\frac{x}{4}-3}$.

4. Высота SO правильной треугольной пирамиды $SPQR$ имеет длину h и составляет с боковым ребром SP угол величиной β. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро PR, если известно, что эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

Вариант №2 (1984 г.)

1. Решите неравенство: $(x^2+13{,}3x+44{,}1)\sqrt{\log_{0,3}|x+6|}\geq 0$.

2. Пункты R и F находятся на реке, впадающей в озеро, а пункты E и Q – на озере. Пути от пунктов E и Q до устья реки (по озеру) пароход преодолевает за p ч за $(p+5)$ ч соответственно, а пути от устья реки до пунктов F и R за 11 ч и 13 ч соответственно. С какой скоростью двигался пароход по озеру, если скорости парохода в стоячей воде и реки постоянны, а пути от E до F и от Q до R равны соответственно 105 км и 131 км?

3. Найдите все значения c при которых система

$$\begin{cases}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)(x+c)=0,\\ -4\leq x<-2\end{cases}$$ имеет только одно решение.

4. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $PQRTP_1Q_1R_1T_1$ радиус окружности, описанной около ее нижнего основания $PQRT$, равен r и боковая грань составляет с плоскостью $PQRT$ угол величиной γ. В квадрат, образовавшийся при пересечении данной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости $PQRT$, вписан круг, который является основанием прямого конуса с вершиной в точке пересечения диагоналей квадрата $PQRT$, причем секущая плоскость проведена так, что конус имеет наибольший возможный объем. Определите высоту этого конуса, если $|P_1Q_1|=a$.

Вариант №1 (1985 г.)

1. Разность цифр двузначного натурального числа A по модулю не превосходит 3, а сумма цифр числа A равна 9. Найдите A.

2. Решите уравнение: $\log_{1/3}(9^x+a)+\log_3 2\cdot 3^x=0$, $a\in R$.

3. Решите уравнение: $\sin\left(b\sqrt{x-1}+\dfrac{\pi}{6}\right)=0{,}5$, $b\in R$.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC. Высоты SD и AF боковой грани ASC имеют длину k и h соответственно, а все плоские углы при вершине S пирамиды имеют одинаковую величину. Найдите площади сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер AS, AB и BC, если известно, что точки A и C удалены на одинаковое расстояние от плоскости BSD.

Вариант №2 (1985 г.)

1. Частное от деления двузначного натурального числа A на сумму его цифр равно 6, а остаток равен 7. Найдите число A, если известно, что сумма квадратов его цифр равна 89.

2. Решите уравнение: $\sin x=-0{,}5$. Сколько корней на промежутке $]\pi;\,10\pi[$ имеет это уравнение?

3. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-4x+4}=a-\sqrt{x^2+6x+9}$, $a\in R$.

4. Основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O и $|AO|=d$. На отрезке SO взята точка O_1 такая, что $|SO_1|:|O_1O|=1:3$, и через точку O_1 проведена плоскость, перпендикулярная к ребру SC. Определите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что $S\hat{B}D=\alpha$.

Вариант №1 (1986 г.)

1. Решите неравенство: $\sqrt{x^3+x^2-2x}>x-1$.

2. При каких $a\in R$ множества решений равнений

$$4\cos^2 x=a^2-6 \quad\text{и}\quad 1-\cos 2x=\frac{a}{6}\quad \text{совпадают?}$$

3. Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной P, равен R. Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр AC окружности основания под углом φ $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$, а окружность – в точках B и D.

Определите объем пирамиды *PABCD*, если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине *P* равен α, а треугольники *APC* и *DPB* равновелики.

4. Из точек *A* и *B*, расстояние между которыми равно 1 м, по прямой *AB* начинают одновременно двигаться два тела. Первое тело начинает движение с постоянной скоростью из точки *A* по направлению к точке *B*, а второе – в том же направлении с начальной скоростью 16 м/с и с некоторым постоянным ускорением. Известно, что через 1 с после начала движения второе тело находилось от точки *A* на расстоянии, не большем чем 15 м, а еще через 1 с – не меньшем чем 25 м. Определите скорость первого тела, если через 3 с после начала движения расстояние между телами составило 2 м.

Вариант № 2 (1986 г.)

1. Решите неравенство:

$$\frac{2}{2+\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 2x}\left(\frac{1}{2+\log_2 x}-1\right)\geq 0.$$

2. Три бригады, работая вместе, могут выполнять некоторую работу за *a* дней. Если сначала будет работать в течение двух дней одна первая бригада, а затем в течение одного дня вторая и третья бригады, то выполненной окажется 1/3 этой работы. За какое время может выполнить всю работу одна первая бригада?

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x,\\ \sin x+\cos y=\sin^2 x.\end{cases}$$

4. Боковое ребро *SA* правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* имеет длину l и составляет с плоскостью основания угол величиной α. В эту пирамиду вписана правильная четырехугольная призма так, что все вершины верхнего основания призмы лежат на боковых ребрах пирамиды, а все вершины нижнего – на основании *ABCD* пирамиды. Найдите площадь основания призмы, если известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение.

Вариант № 1 (1987 г.)

1. Решите уравнение:

$$\log_3(2\sin x-1+18\sin^2 x)=-\log_{1/3}(1-7\sin x).$$

2. Двое рабочих, работая одновременно, выполняют некоторую работу за 15 минут. Сколько времени потребуется второму рабочему, чтобы выполнить эту работу одному, если известно, что один первый рабочий выполнил бы эту работу на *m* часов быстрее, чем второй?

3. Решите неравенство: $(c+1)<(c+2)\,3^{\sqrt{x-1}}$.

4. Правильная четырехугольная пирамида *SPQRT* пересечена плоскостью, равноудаленной от точек *S*, *P*, *Q*, *R*, *T*. Определите площадь сечения этой плоскостью шара, вписанного в пирамиду *SPQRT*, если высота пирамиды *SQ* имеет длину *h*, а величина угла *SPQ* равна α.

Вариант № 2 (1987 г.)

1. Решите неравенство: $\sqrt{x^2-7{,}5x+14}\,\log_2|x-3|\leq 0$.

2. В двух сосудах емкостью по 5 л каждый содержится раствор щелочи. Первый сосуд содержит 3 л p%-го (по объему) раствора щелочи, второй – 4 л $2p$%-го раствора такой же щелочи. Сколько литров из второго сосуда надо перелить в первый, чтобы получить в нем 10%-й раствор щелочи?

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases}(a^2-a)\sin\left(\frac{x}{2}\right)+2\cos y=a+5;\\ 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos y=4, \quad a\in R.\end{cases}$

4. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* величина $\angle BSD$, образованного двумя противоположными боковыми ребрами *SB* и *SD*, равна 2α. Через точку *A* параллельно прямой *BD* проведена плоскость π, пересекающая общую линию плоскостей *ASC* и *BSD* в точке *P*, удаленной от прямой *SB* на расстояние $d>0$. Определите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$, если плоскость π образует с плоскостью основания $ABCD$ угол величиной α.

Вариант №1 (1988 г.)

1. Решите неравенство: $\sqrt{x^3+x^2-2x}+1 \le x$.

2. Решите уравнение: $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = a$.

3. Четырехзначное натуральное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A представляют три последовательных члена арифметической прогрессии. Из всех чисел A, удовлетворяющих указанным условиям, найдите то, у которого разность между цифрой десятков и цифрой сотен имеет наименьшее возможное значение.

4. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол величиной α, а с боковым ребром SC – угол величиной β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра пирамиды имеют длину l.

Вариант №2 (1988 г.)

1. Решите неравенство: $\sqrt{3x^2+25x+42} > x+4$.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 5\cdot 6^{-\sin 3x}+6\cdot 7^{\cos y}=72, \\ 6^{1-\sin 3x}+7^{1+\cos y}=c. \end{cases}$

3. В первом и втором сосудах содержится кислота: в первом сосуде 5 л 30%-го раствора, во втором сосуде 7 л 40%-го раствора. Этими растворами наполнили 10-литровый сосуд так, что концентрация кислоты в нем оказалась равной $C\,\%$. Остальную кислоту слили в четвертый сосуд. В каком из двух сосудов, в третьем или в четвертом, концентрация кислоты больше?

4. В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

Вариант №1 (1989 г.)

1. Решите уравнение: $\sqrt{\cos^3 x-\sin^3 x}=\sqrt{-\sin x}$.

2. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из трех различных отличных от нуля цифр k, l и m, не менее 1650, но не более 1800. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найдите число $\overline{klm}$, если известно, что оно нечетное и наименьшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

3. Решите уравнение $\log_{1/3}\left(23+|6x-5-x^2|\right)=c$, $c\in R$.

4. Через сторону Q_1R_1 верхнего основания правильной треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ $(PP_1 \parallel QQ_1 \parallel RR_1)$ проведена плоскость, пересекающая ребро PP_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема отсеченного многогранника, одной из граней которого является верхнее основание $P_1Q_1R_1$ призмы, к объему отсеченного многогранника, одной из граней которого служит боковая грань QQ_1R_1R, равно q. Найдите величину угла между секущей плоскостью и плоскостью верхнего основания призмы, если известно, что величина угла между прямыми PR_1 и QQ_1 равна φ.

Вариант №2 (1989 г.)

1. Решите уравнение: $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 3x=\operatorname{ctg}^2 3x\cos x$.

2. Имеются два сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Первый сплав весит 300 г и содержит 40% меди, а второй –

весит 500 г и содержит 40% олова. Процентное содержание олова в первом сплаве втрое больше процентного содержания цинка во втором сплаве. После того как оба куска сплавили в один, в нем оказалось a % олова. Сколько граммов меди содержит новый сплав?

3. Решите уравнение: $\log_4(x-5) = -\log_{0,25}(|a-x|-3)$, $a \in R$.

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковая грань BSC составляет с плоскостью основания угол γ, а высота пирамиды SO имеет длину h. Плоскость π, параллельная AC и SB, удалена от SB на второе меньшее расстояние, чем от AC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью π.

Вариант № 1 (1990 г.)

1. Решите уравнение: $\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}(1-\cos x)} = \sin x + 4\cos(-x)$.

2. Натуральное трехзначное число B, уменьшенное на 18, делится без остатка на 6, причем частное от такого деления равно произведению цифр десятков и единиц числа B. Найдите число B, если известно, что при делении этого числа на произведение цифр десятков и сотен в частном получается 25 и в остатке 8, а при делении на произведение цифр сотен и единиц в частном получается 16, а в остатке 2.

3. Найдите все значения $b \in R$, при каждом из которых неравенство $\log_3(x^2+1) + \log_3 6 \geq -\log_{1/3}(2bx^2+x+2b)$ выполняется при любом действительном x.

4. Правильная треугольная пирамиды $SABC$ пересечена плоскостью, проходящей через центр описанного около этой пирамиды шара параллельно ребрам AB и SC. Найдите площадь полученного сечения, если известно, что длина ребра SC равна l, а отношение расстояния от центра шара до плоскости основания ABC пирамиды к расстоянию от центра шара до вершины S равно m.

Вариант № 2 (1990 г.)

1. Решите уравнение: $(\sin x)(2\sin 4x - \cos 4x)^2 = 5\sin^3 x$.

2. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала к работе приступил первый рабочий, а затем, через некоторое время,– второй. Когда 7/34 всей работы было выполнено, начал работать третий рабочий. Работу все трое закончили одновременно. Известно, что для выполнения 15/17 всей работы первому и второму рабочим при совместной работе требуется на 10 часов меньше, чем одному третьему для выполнения всей работы. Сколько времени работал первый рабочий, если количество изготовленных им деталей составляет 5/6 количества деталей, изготовленных вторым рабочим, а третий, проработав на 4 часа меньше второго, изготовил столько же деталей, что и второй рабочий?

3. Решите уравнение $\sqrt{(0,25)^x - 6\cdot 2^{-x}+1} = k - 2^{-x}$, $k \in R$.

4. Прямой круговой конус описан около треугольной пирамиды $SABC$, у которой боковые грани SAB, SBC и SAC – равновеликие треугольники. Определите объем конуса, если известно, что боковое ребро SA пирамиды имеет длину l и $\angle S\hat{B}A = \alpha$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава I

2. 1) $\vec{c} = 3\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{d} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 2\vec{a}$, $\vec{d} = 7\vec{a} - \vec{b}$;

3) $\vec{c} = \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; 4) $\vec{c} = \vec{c}_0$, $\vec{d} = 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{c}_0$, $\vec{c}_0$ – любой вектор, если $2\vec{a} = 3\vec{b}$; $\{\vec{c}, \vec{d}\} = \varnothing$, если $2\vec{a} \neq 3\vec{b}$.

3. 1) $\vec{m} = \frac{3\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})}{4}$, $\vec{p} = \frac{3\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})}{4}$, $\vec{q} = \frac{3\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})}{4}$;

2) $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, $\vec{p} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $\vec{q} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$. **5.** а) и б) при $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

6. а) Если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый; б) если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прямой; в) если угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой.

7. 1) $\sqrt{142}$; 2) $\sqrt{113}$. **8.** 1) $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$; 2) $\frac{4}{5}(\vec{b} - \vec{c})$.

10. б) O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

11. $\vec{a} - k\vec{b} + k\vec{c}$. **14.** $\vec{c} + \frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}\vec{a}$. **16.** а) $\vec{AB} = (-3; 1)$; б) $\vec{BA} = (3; -1)$.

17. 1) $(2; 4; 0)$; 2) $(-2; -4; 0)$. **18.** 1) 5; 2) 13; 3) 7; 4) $5\sqrt{29}$.

19. $A(4; 12; 4)$. **20.** $(5; 1; 1)$. **21.** 1) $x = 1$, $y = 3$;

2) $x = 2$, $y = -3$. **22.** 1) $x = -2$, $z = 8$; 2) $x = 5$, $z = 6$.

23. 1) $x = 2\sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{2}$, $z = -2$; 2) $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{2}$.

24. 1) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = -\frac{12}{13}$. **25.** 1) да; 2) нет; 3) нет. **26.** $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{2\pi}{3}$. **27.** $\frac{\pi}{2}$.

28. 1) $(4\sqrt{2}; 4; -4)$; $(4\sqrt{2}; -4; -4)$; 2) $(3\sqrt{23}; 23; 2\sqrt{23})$; $(3\sqrt{23}; -23; 2\sqrt{23})$. **29.** 1) $(3; -3; 4)$; 2) $(1; 3; -6)$; 3) $(-4; 0; 2)$;

4) $\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{5}{3}\right)$; 5) $(8; -12; 18)$; 6) $\left(-\frac{11}{3}; -1; \frac{11}{3}\right)$.

30. 1) $|\vec{p}| = 2|\vec{q}|$, $\uparrow\downarrow$; 2) $|\vec{p}| = \frac{1}{8}|\vec{q}|$, $\uparrow\downarrow$. **31.** 1) $\alpha = -12$, $\beta = \frac{3}{2}$;

2) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -2$. **33.** 1) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, 2) $\left(0; -\frac{8}{17}; \frac{15}{17}\right)$.

34. $6\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$. **35.** $(-4; 9; 5)$. **36.** $\vec{AM} = (2; 1; 0)$, $\vec{BN} = \left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{9}{2}\right)$, $\vec{CP} = \left(-\frac{5}{2}; -2; \frac{9}{2}\right)$. **37.** 1) $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$, $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$;

2) $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{b} = 3\vec{c} - 3\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{a} = 2\vec{b}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$ (векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, и вектор $\vec{c}$ линейно не зависит от $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

4) $\vec{a} = 3\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a}$ (векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, и вектор $\vec{b}$ линейно не зависит от $\vec{a}$ и $\vec{c}$).

38. 1) $\vec{m} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{m} + 3\vec{q} - \vec{r})$, $\vec{q} = \frac{1}{3}(-\vec{m} + 2\vec{p} + \vec{r})$, $\vec{r} = \vec{m} - 2\vec{p} + 3\vec{q}$. 2) $\vec{m} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{p} = \vec{m} + \vec{q} - \vec{r}$, $\vec{q} = \vec{p} + \vec{r} - \vec{m}$, $\vec{r} = \vec{m} - \vec{p} + \vec{q}$.

39. 1) -4; 2) 2; 3) 16; 4) 26; 5) -8; 6) -26; 7) 488.

40. 1) 3; 2) 4; 3) 3; 4) 13; 5) -8; 6) 1; 7) 13.

41. а) 1) -76; 2) 36; 3) 500; б) 1) -49; 2) 55; 3) 337.

42. 1) -295; 2) -172. **43.** 1) $\sqrt{84}$; 2) $\sqrt{7}$. **44.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$.

Указание. Вычислите $\vec{a}\vec{p}$. **45.** 1) $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$; 2) $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

46. $\frac{\vec{b}\vec{c}}{\vec{c}^2}\vec{c} - \vec{b}$. **47.** а) 1) 10; 2) 3; 3) 13; 4) -1015; 5) 198; 6) 158;

б) 1) 40; 2) 7; 3) 6; 4) -207; 5) 165; 6) 5. **48.** 1) -8; 2) -5.

49. 1) -18; 2) 36. **50.** 1) 3; 2) 4. **51.** а) 1) -307; 2) $\sqrt{51}$;

3) $(66; 33; -99)$; б) 1) -1132; 2) $3\sqrt{10}$; 3) $(0; 0; 0;)$. **52.** а) 1) $\{-1; 2\}$;

2) $]-\infty; -1[\cup]2; \infty[$; 3) $]-1; 2[$; б) 1) $\{-4; -1\}$; 2) $]-4; -1[$;

3) $]-\infty; -4[\cup]-1; \infty[$. **53.** 1) $\{-1\}$; 2) $\{7\}$; **54.** 1) $\frac{5}{2\sqrt{345}}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

55. 1) $\hat{A} = \arccos\frac{67}{5\sqrt{219}}$; $\hat{C} = \pi - \arccos\sqrt{\frac{17}{75}}$; 2) $\pi - \arccos\frac{1}{3}\sqrt{\frac{425}{73}}$.

56. 1) $(-9;\ 6;\ -15)$; 2) $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$. **57.** 1) $-4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$; 2) $(-1;\ 0;\ -5)$. **58.** 1) $(1;\ 3;\ -1)$; 2) $(5;\ 2;\ -4)$. **59.** 1) $(1;\ -3;\ 2)$; 2) $(-4;\ -2;\ -1)$. **60.** $(1;\ 1;\ 2)$. **61.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{16}{5}$. **62.** $\frac{21}{13}$.

63. $-\frac{9}{7}$. **64.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 8; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 10. **65.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}$.

66. а) 1) 6; 2) 12; б) $2\sqrt{6}$; 2) $4\sqrt{6}$. **67.** а) 1) 27; 2) 1728; б) 1) $\frac{3}{4}$; 2) 48. **68.** $\vec{a} \parallel \vec{b}$. **69.** $\vec{c} \parallel \vec{d}$. **70.** а) 1) $(4;\ -5;\ 2)$; 2) $(-4;\ 5;\ -2)$; 3) $(12;\ -15;\ 6)$; 4) $(-12;\ 15;\ -6)$; 5) $(48;\ -60;\ 24)$; 6) $(-48;\ 60;\ -24)$; б) 1) $(5;\ -5;\ 5)$; 2) $(-5;\ +5;\ -5)$; 3) $(15;\ 15;\ 15)$; 4) $(-15;\ -15;\ -15)$; 5) $(60;\ -60;\ 60)$; 6) $(-60;\ 60;\ -60)$; в) 1) $(-1;\ -2;\ 6)$; 2) $(1;\ +2;\ -6)$; 3) $(-3;\ -6;\ 18)$; 4) $(3;\ +6;\ -18)$; 5) $(-12;\ -24;\ 72)$; 6) $(12;\ +24;\ -72)$; г) 1) $(-4;\ 8;\ 1)$; 2) $(+4;\ -8;\ -1)$; 3) $(-12;\ 24;\ 3)$; 4) $(-12;\ -24;\ -3)$; 5) $(48;\ 96;\ 12)$; 6) $(-48;\ -96;\ -12)$. **71.** а) 1) $(-21;\ 8;\ -19)$; 2) $(84;\ -32;\ 76)$; б) 1) $(-1;\ 2;\ 3)$; 2) $(4;\ -8;\ -12)$. **72.** 1) $(6;\ 3;\ -2)$; 2) $(-2;\ 2;\ 4)$.

73. а) $\frac{\sqrt{2501}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{62}}{2}$. **74.** 1) 1; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **75.** 1) 1; 2) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{\frac{8}{11}}$; 4) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **76.** 1) $\vec{0}$, $(-4;\ 0;\ -4)$; 2) $(0;\ 2;\ 0)$, $(0;\ 2;\ 0)$; 3) $(-2;\ 2;\ 2)$, $(1;\ 1;\ 0)$; 4) $(2;\ -2;\ 2)$, $(0;\ -1;\ -1)$. **78.** 1) 48; 2) 0; 3) -35; 4) -42.

79. 1) Нет; 2) Нет. **80.** 1) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; 2) $\{3\}$. **81.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 7.

82. 1) $\left(0;\ 0;\ \frac{13}{7}\right)$, $(0;\ 0;\ 5)$; 2) $(0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 8)$. **83.** 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3}$; 2) $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{4}$; 3) $\frac{x+1}{0} = \frac{y+4}{-3}$; 4) $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{0}$. **84.** 1) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1}$; 2) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+7}{2}$. **85.** 1) $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2}$; 2) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-3}$; 3) $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+2}{7}$;

4) $\frac{x-6}{0} = \frac{y}{1}$. **86.** 1) $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{1}$; 2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$; 3) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{0}$; 4) $\frac{x+1}{0} = \frac{y+2}{2}$. **87.** 1) $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{8}$; 2) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{1}$; 3) $\frac{x-12}{5} = \frac{y-5}{0}$; 4) $\frac{x+1}{0} = \frac{y+7}{1}$. **88.** 1) $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-5}{1}$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{0}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1}$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-5}$. **89.** 1) $\left(4;\ \frac{4}{3}\right)$; 2) $(1{,}3;\ -0{,}1)$. **90.** 1) $(-1;\ -4)$; 2) $(-1;\ 13)$.

91. 1) $\frac{54}{13}$; 2) $\frac{29}{17}$. **92.** 1) $5x + 4y - 2x + 3 = 0$; 2) $x - 2y + 4 = 0$; 3) $x + 1 = 0$; 4) $z - 1 = 0$. **93.** 1) $3x - 3y + 13z - 6 = 0$; 2) $2x + 2y + 5z - 40 = 0$.**94.** 1) $15x + 20y + z - 80 = 0$; 2) $3x + 2y - 10z - 27 = 0$. **95.** 1) $5x - 5y - z + 51 = 0$; 2) $x - 7 = 0$. **96.** 1) $6x - y - 38z + 2 = 0$; 2) $6x - 17y + 5z - 17 = 0$. **97.** 1) $3x - y + 5z - 7 = 0$; 2) $x + y - 8z + 2 = 0$. **98.** 1) $2x + 9y - z - 7 = 0$; 2) $11x - 4y + z + 7 = 0$. **99.** 1) $\frac{9}{13}$; 2) $\frac{10}{3}$. **100.** 1) $\frac{18}{7}$; 2) $\frac{17}{3}$.

101. 1) $\frac{x-7}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$; 2) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

102. 1) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{0} = \frac{z+1}{3}$; 2) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{7}$.

104. 1) $\frac{x+8}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{8}$; 2) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-15}{-10}$.

105. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\arccos\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **106.** 1) $\arcsin\frac{5}{6}$; 2) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{30}}$.

107. 1) $\arccos\frac{25}{\sqrt{780}}$; 2) $\arccos\sqrt{\frac{7}{34}}$.

Глава II

§ 1

25. $\operatorname{tg} 51^\circ$. **26.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **27.** $\sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$. **28.** $\sqrt{2}\,|\cos\alpha|$.

29. $-2\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha>0$; $2\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha<0$.

30. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $0\le\sin\alpha<1$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $-1<\sin\alpha<0$.

31. $\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 32. $\dfrac{-\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(1-n)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

33. $4\cos 28^\circ\cos 25^\circ\sin 53^\circ$. 34. $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

35. $4\sin 2\alpha\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)$. 36. $2\sin\alpha\,\sin\beta\,\cos(\alpha+\beta)$.

37. $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$. 38. $8\cos 4\alpha\,\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\operatorname{cosec}^2 4\alpha$.

39. $0{,}5a(3-a^2)$; $1-0{,}5(a^2-1)^2$; $\sqrt{2-a^2}$. 40. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

41. $\frac{12}{37}$. 42. $4\sqrt{5}$. 43. $-\frac{4}{3}$. 44. $\frac{13\sqrt{10}}{50}$. 45. 1. 46. $0{,}25\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$.

47. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. 48. $0{,}5\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 50. $0{,}5(3-\sqrt{3})$. 51. $\sqrt{3}$. 52. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Указание. Воспользуйтесь уравнением $\sin(2\cdot 18^\circ)=\cos(3\cdot 18^\circ)$.

53. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. 54. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. 55. $\sqrt{3}$. 56. 5. 57. 24.

§ 2

58. π. 59. $\frac{2\pi}{3}$. 60. 6π. 61. 4π. 62. 2π. 63. $\frac{\pi}{3}$. 64. 2.

65. 4. 66. 2π. 67. π.

§ 3

98. $2\cos 2x$. 99. $-3\sin 3x$. 100. $4\sec^2 4x$. 101. $-5\operatorname{cosec}^2 5x$.

102. $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$. 103. $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$. 104. $\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$. 105. $\dfrac{-1}{7\sin^2\frac{x}{7}}$.

106. $-3\cos(1-3x)$. 107. $6\sin(2-6x)$. 108. $-\dfrac{4}{\cos^2(1-4x)}$.

109. $\dfrac{-16x+1}{\sin^2(8x^2-x)}$. 110. $y-2=0$. 111. $y+\sqrt{2}=\dfrac{-\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sqrt{2}}$.

112. $y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. 113. $y-1=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$. 114. $\{\pi(2n+1)\,|\,n\in Z\}$.

115. $\left\{\pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 116. $\left\{-\frac{3\pi}{4}-\pi n;\ 0;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\,\middle|\,n\in Z_0\right\}$.

117. $\left\{\frac{\pi}{4}-\pi n;\ 0;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\,\middle|\,n\in N\right\}$. 118. $]-2;\ 2[$.

119. $y'=\operatorname{ctg}^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+11\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-26$; $x=\frac{\pi}{6}-\operatorname{arctg}13+\pi(2k+1)$;

$x=\frac{\pi}{6}+\operatorname{arcctg}2+2\pi k$, $k\in Z$. 120. $2\sin 4\cos 2$; $2\sin 2\cos 4$.

121. $3+\sqrt{2}$; $3-\sqrt{2}$. 122. $y\left(\frac{\pi}{6}\right)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$; $y\left(\frac{5}{6}\pi\right)_{\min}=-\frac{5}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

123. $y(\pi)_{\min}=\pi-\frac{1}{2}$; $y(2\pi)_{\max}=2\pi-\frac{1}{2}$.

§ 4

124. $\frac{3}{4}\pi$. 125. $\frac{17}{12}\pi$. 126. $D(y)=[1;\ 3]$. 127. $D(y)=[-\sqrt{3};\ -1]\cup[1;\ 3]$.

128. $D(y)=]-\infty;\ +\infty[$. 129. $D(y)=]-\infty;\ +\infty[$. 141. $\frac{4}{5}$. 142. $\frac{4}{5}$. 143. $\frac{3}{5}$.

144. $\frac{3}{4}$. 145. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 146. $\frac{21}{20}$. 147. $\frac{24}{25}$. 148. $-\frac{24}{7}$. 149. $\frac{24}{25}$. 150. $\frac{7}{25}$.

151. $\frac{24}{7}$. 152. $\frac{3}{5}$. 153. $\frac{117}{125}$. 154. $-\frac{44}{125}$. 155. $\frac{2}{3}$. 156. $\sqrt{\frac{26+\sqrt{26}}{52}}$.

157. $-\frac{3}{5}$. 158. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 159. $-\frac{7}{25}$. 160. $\frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$. 161. $\frac{7}{26}$.

167. $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$.

168. $\arccos\frac{12}{13}=\arcsin\frac{5}{13}=\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\operatorname{arcctg}\frac{12}{5}$.

169. $\operatorname{arctg}\frac{7}{24}=\operatorname{arcctg}\frac{24}{7}=\arcsin\frac{7}{25}=\arccos\frac{24}{25}$.

170. $\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}=\arcsin\frac{4}{5}=\arccos\frac{3}{5}$. 175. $-\arcsin\frac{1}{3}$.

176. $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. 177. $-\operatorname{arctg}\frac{7}{24}$. 178. $\pi-\operatorname{arcctg}\frac{7}{24}$. 195. 1.

196. $\frac{1}{2}$. 197. $k=2$; $\left\{\left(\cos\frac{\pi^2}{4};\ 1\right),\ \left(\cos\frac{\pi^2}{4};\ -1\right)\right\}$.

198. $k=1$; $\left\{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4};\ (1-\sqrt{7})\right);\ \left(\cos\frac{\pi}{4};\ (1+\sqrt{7})\right)\right\}$.

199. $\max f(x)=f(-1)=\frac{7\pi^3}{8}$; $\min f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^3}{32}$. 200. $-\frac{\pi}{7}$. 201. $\frac{3\pi}{7}$.

202. $\frac{11\pi}{18}$. 203. $3-\frac{\pi}{2}$; $4-\frac{\pi}{2}$; $10-\frac{5}{2}\pi$. 216. $-\sin 1{,}5$. 217. $-3\operatorname{tg}1$.

218. $-1{,}5$. 219. $\sqrt{3}$. 220. $[0;\ 1]$. 221. $[-1;\ 0]$. 222. $]0;\ 1[$.

223. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$. 224. $[0;\ 1]$. 225. $[-1;\ 1]$. 226. $[-1;\ 1]$. 227. $[-1;\ 1]$.

228. $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$. 229. $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 230. $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \infty\right[$. 231. $]-\infty;\ \operatorname{ctg}2[$.

§ 5

232. $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 233. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 234. $\{\pi n\,|\,n\in Z\}$.

235. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 236. $\varnothing$. 237. $\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n\,|\,n\in Z\right\}$.

238. $\left\{2\pi n\pm\frac{\pi}{3}\,|\,n\in Z\right\}$. 239. $\left\{2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\,|\,n\in Z\right\}$. 240. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\,|\,n\in Z\right\}$.

241. $\{\pi+2\pi n\,|\,n\in Z\}$. 242. $\{2\pi n\,|\,n\in Z\}$. 243. $\left\{2\pi n\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)|\,n\in Z\right\}$.

244. $\varnothing$. 245. $\left\{\frac{\pi n}{3}\pm\frac{1}{6}\arccos\frac{1}{3}\,|\,n\in Z\right\}$. 246. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\,|\,n\in Z\right\}$.

247. $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 248. $\{-\operatorname{arctg}10+\pi n\,|\,n\in Z\}$.

249. $\left\{\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}5+\frac{\pi}{3}n\,|\,n\in Z\right\}$. 250. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}+\pi n\,|\,n\in Z\right\}$.

251. $\left\{\frac{\pi}{9}-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3}n\,|\,n\in Z\right\}$. 252. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}\,|\,n\in Z\right\}$. 253. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4}\,|\,n\in Z\right\}$.

254. $\left\{\pi n-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\,|\,n\in Z\right\}$. 255. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4};\ \pi n+\operatorname{arctg}2\,|\,n\in Z\right\}$.

256. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4};\ \pi n-\operatorname{arctg}4\,|\,n\in Z\right\}$. 257. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2};\ \pi n+\operatorname{arctg}3\,|\,n\in Z\right\}$.

258. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2};\ \pi n+\frac{\pi}{3}\,|\,n\in Z\right\}$. 259. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2};\ \pi n-\frac{\pi}{4}\,|\,n\in Z\right\}$.

260. $\left\{2\pi n+\frac{\pi}{3};\ 2\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 261. $\left\{2\pi n+\frac{2}{3}\pi\,|\,n\in Z\right\}$.

262. $\left\{\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\,|\,n\in Z\right\}$. 263. $\left\{\pi n+\frac{3}{8}\pi\,|\,n\in Z\right\}$.

264. $\left\{\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{12}\,|\,n\in Z,\ n\neq 3m+1;\ m\in Z\right\}$. 265. $\varnothing$.

266. $\left\{\pi n;\ \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\,|\,n\in Z\right\}$. 267. $\left\{\frac{\pi n}{3}\,|\,n\in Z\right\}$.

268. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8}\,|\,n\in Z\right\}$. 269. $\left\{\frac{3}{2}\pi n+\frac{3}{8}\pi;\ 3\pi n+\frac{3}{4}\pi\,|\,n\in Z\right\}$.

270. $\left\{\frac{\pi n}{3}\,|\,n\in Z\right\}$. 271. $\left\{\frac{4k+1-\sqrt{1+8k}}{2};\ \frac{4k+3+\sqrt{8k+5}}{2}\,|\,k\in Z_0\right\}$.

272. $\left\{\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+2\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 273. $\left\{2\pi n\pm\frac{2\pi}{3};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\,|\,n\in Z\right\}$.

274. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{9}\,|\,n\in Z\right\}$. 275. $\left\{\frac{\pi n}{3}+\frac{2\pi}{9};\ \pi n+\frac{2\pi}{3}\,|\,n\in Z\right\}$.

276. $\left\{\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi n}{7};\ \frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n\,|\,n\in Z\right\}$. 277. $\{c,\ c\in R,\ c\neq\pi n,\ n\in Z\}$.

278. $\{\pi n\,|\,n\in Z\}$. 279. $\left\{\frac{\pi n}{4};\ \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8}\,|\,n\in Z\right\}$. 280. $\left\{\frac{\pi n}{8}\,|\,n\in Z\right\}$.

281. $\left\{\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}\,|\,n\in Z\right\}$. 282. $\left\{\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi n}{2}\pm\frac{\pi}{12}\,|\,n\in Z\right\}$.

283. $\left\{\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 284. $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

285. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi n}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 286. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 287. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

288. $\left\{2\pi n\pm\frac{\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 289. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

290. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 291. $\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 292. $\left\{\frac{3\pi n}{2}\pm\frac{\pi}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

293. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 294. $\left\{\frac{\pi n}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

295. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

296. $\left\{2\pi n-\frac{\pi}{2};\ \pi n+(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 297. $\left\{2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

298. $\left\{\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 299. $\left\{2\pi n\pm\frac{\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

300. $\left\{\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 301. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 302. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

303. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4};\ \pi n+\operatorname{arctg}3\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 304. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

305. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 306. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(2\sqrt{a^2-1}-1\right)\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $1<|a|\le\sqrt{2}$; $\varnothing$ при $a\in\,]-\infty;\ -\sqrt{2}[\,\cup\,]-1;\ 1[\,\cup\,]\sqrt{2};\ +\infty[$.

307. $\left\{2\pi n\pm\arccos\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $a\neq 0$; $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $a=0$.

308. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 309. $\left\{\frac{\pi n}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{16}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

310. $\left\{\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in Z\right\}$. 311. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

312. $\left\{\pi n;\ \pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6};\ \pi n+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 313. $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

314. $\left\{\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi n}{3}\pm\frac{2\pi}{9}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 315. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

316. $\left\{2\pi n;\ 4\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 317. $\left\{2\pi n\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4},\ \pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $1<m\le 5$; $\left\{2\pi n+\arccos\frac{-1\pm\sqrt{4m+5}}{4},\ \pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $-\frac{5}{4}\le m\le 1$; $\{\pi n\,|\,n\in Z\}$ при $m<-\frac{5}{4}$ и $m>5$. 318. $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

319. $\{2\pi n\,|\,n\in Z\}$ при $a\in\left]-\infty;\ -\frac{5}{4}\right[\cup\,]5;\ +\infty[$;

$\left\{2\pi n;\ 4\pi n\pm 2\arccos\left(\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}\right)\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $a\in[5;\ 1]$;

$\left\{2\pi n;\ 4\pi n\pm 2\arccos\left(\frac{\sqrt{4a+5}-1}{4}\right)\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $a\in\,]1;\ 5]$.

320. $\{2\pi n\,|\,n\in Z\}$. 321. $\left\{2\pi n-\frac{\pi}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 322. $\left\{2\pi n;\ 2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

323. $\left\{\pi n+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 324. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{2};\ \pi n-\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

325. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 326. $\left\{2\pi n-\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

327. $\left\{\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{a}{\sqrt{2}}+2\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$ при $|a|\le\sqrt{2}$.

328. $\left\{2\pi n-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 329. $\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

330. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+\frac{\pi}{2}n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

331. $\left\{\frac{2}{5}\pi n-\frac{\pi}{20};\ \frac{3\pi}{100}+\frac{2}{25}\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 332. $\{\pi+2\pi n\,|\,n\in Z\}$.

333. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 334. $\{2\pi+8\pi n\,|\,n\in Z\}$. 335. $\left\{2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

336. $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 337. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

338. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$. 339. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

340. $\left\{2\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n \mid n\in Z\right\}$. 341. $\left\{-\frac{\pi}{20}+(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{5}n\mid n\in Z\right\}$.

342. $\left\{\frac{\pi}{4}n;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\mid n\in Z\right\}$. 343. $\left\{2\pi n,\ \frac{5}{2}\pi+2\pi n\right\}$.

344. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\mid n\in Z\right\}$. 345. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}h\mid n\in Z\right\}$.

346. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n\mid n\in Z\right\}$. 347. $\left\{(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}\pi n\mid n\in Z\right\}$.

348. $\left\{\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+(2n+1)\pi\mid n\in Z\right\}$. 349. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\mid n\in Z\right\}$.

350. $\left\{\frac{\pi}{8}(2n+1);\ \pi n\pm\frac{\pi}{3}\mid n\in Z\right\}$. 351. $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in Z\right\}$.

352. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in Z\right\}$. 353. $\left\{\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{7\pi}{12}+\pi n\mid n\in Z\right\}$.

354. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\pm\frac{\pi}{6}\mid n\in Z\right\}$. 355. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\mid n\in Z\right\}$.

356. $\left\{\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{8};\ \pi n\pm\frac{\pi}{3}\mid n\in Z\right\}$. 357. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\mid n\in Z\right\}$.

358. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in Z\right\}$. 359. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in Z\right\}$.

360. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ (-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n\mid n\in Z\right\}$.

361. $\left\{\frac{8\pi}{7}n;\ \frac{4\pi}{9}+\frac{8\pi n}{9}\mid n\in Z\right\}$. 362. $\{\pi n\mid n\in Z\}$. 363. $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\mid n\in Z\right\}$.

364. $\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}n\mid n\in Z\right\}$. 365. $\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6};\ \pi n-\frac{\pi}{4}\mid n\in Z\right\}$.

366. $\left\{\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}\mid n\in Z\right\}$. 367. $\left\{\frac{\pi n}{12}\mid n\in Z\right\}$.

368. $\left\{\pi n;\ (-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi n\mid n\in Z\right\}$. 369. $\varnothing$.

370. $x\in R$, кроме $x=\frac{\pi}{2}-\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in Z$.

371. $\frac{1+(4k+1)\pi\pm\sqrt{1+2(4k+1)\pi}}{2}$. 372. $\varnothing$.

373. $\frac{-5\pm\sqrt{25+2\pi(2k+1)}}{2}$, $k=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\dots$.

374. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $y=(2n\pm k)\pi$, $n\in Z$. 375. $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\right)$.

376. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\arcsin(1-\sqrt{2a+3})\mid n\in Z\right\}$ при $a\in\left[-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; $\varnothing$ при $a\in\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};\ \infty\right[$. 377. $\left\{\frac{\pi n}{4}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}\mid n\in Z\right\}$ при $a\in\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$; $\varnothing$ при $a\in\left]-\infty;\ \frac{1}{4}\right[\cup]1;\ +\infty[$.

378. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(2\sqrt{a^2-1}-1\right)\mid n\in Z\right\}$ при $1\le|a|\le\sqrt{2}$; $\varnothing$ при $a\in]-\infty;\ -\sqrt{2}[\cup]-1;\ 1[\cup]\sqrt{2};\ \infty[$.

379. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos(2a+5)\mid n\in Z\right\}$ при $a\in[-3;\ -2]$; $\varnothing$ при $a\in]-\infty;\ -3[\cup]-2;\ \infty[$.

380. $\left\{\frac{\pi n}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{6a-5}{3-2a}\mid n\in Z\right\}$ при $a\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$; $\varnothing$ при $a\in\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[\cup]1;\ +\infty[$. 381. $\left\{\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{9-4a-4a^2}}{2(1+a)}\right\}$ при $a\in\left[\frac{-1-\sqrt{10}}{4};\ \frac{-1+\sqrt{10}}{4}\right]$; $\varnothing$ при $a\in\left]-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{10}}{4}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{10}}{4};\ \infty\right[$.

382. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi n\mid n\in Z\right\}$. 383. $a=-1$; $a=0$.

§ 6

384. $\left\{\pi\left(m+\frac{n}{2}\right);\ \pi\left(\frac{n}{2}-m\right)\mid m,\ n\in Z\right\}$.

385. $\left\{\pi(m+n)\pm\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3};\ \pi(m-n)\pm\frac{\pi}{8}\mp\frac{\pi}{3}\mid m,\ n\in Z\right\}$. 386. $\left\{\left(\frac{\pi}{2}(m+n)+(-1)^m\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{2}(m-n)+(-1)^m\frac{\pi}{6}-(-1)^n\frac{\pi}{12}\right)\mid m,\ n\in Z\right\}$.

387. $\left\{\left(\pi m \pm \frac{\pi}{3};\ \pi n \mp \frac{\pi}{3}\right) \mid m,\ n \in Z\right\}$. 388. $\left\{\left(2\pi m \pm \frac{\pi}{3};\ 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}\right) \mid m, n \in Z\right\}$.

389. $\left\{\left(\pi m + \frac{\pi}{3};\ \pi n + \frac{\pi}{3}\right) \mid m,\ n \in Z\right\}$.

390. $\left\{\left(\pi m + (-1)^m \frac{\pi}{4};\ 2\pi n \pm \frac{3\pi}{4}\right);\ \left(\pi m + (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4};\ 2\pi n \pm \frac{\pi}{4}\right) \mid m,\ n \in Z\right\}$.

391. $\{(2\pi m;\ \pi n) \mid m, n \in Z\}$. 392. $\left\{\left(\pi\left(m + \frac{n}{2}\right) + \frac{\pi}{4};\ \pi\left(\frac{n}{2} - m\right) - \frac{\pi}{4}\right) \mid m, n \in Z\right\}$.

393. $\{(\pi(m+n);\ \pi(m-n)) \mid m,\ n \in Z\}$.

394. $\left\{\left(\pi(m+n) \pm \frac{\pi}{6};\ \pi(m-n) \pm \frac{\pi}{6}\right) \mid m,\ n \in Z\right\}$.

395. $\left\{\left(2\pi n + \frac{\pi}{3};\ -2\pi n\right);\ \left(-2\pi n;\ 2\pi n + \frac{\pi}{3}\right) \mid n \in Z\right\}$.

396. $\left\{\left(2\pi n + \frac{7\pi}{12};\ 2\pi n + \frac{\pi}{12}\right);\ \left(2\pi n - \frac{\pi}{12};\ 2\pi n - \frac{7\pi}{12}\right) \mid n \in Z\right\}$.

397. $\left\{\left(\pi n + \frac{\pi}{6};\ -\pi n\right);\ \left(-\pi n;\ \pi n + \frac{\pi}{6}\right) \mid n \in Z\right\}$.

398. $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi m \mid k,\ m,\ n \in Z\right\}$.

399. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5});\ \arccos\frac{1}{4}\right)$. 400. $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(3;\ \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(3;\ -\frac{\pi}{6}\right)$.

401. $\{x;\ y\} \in \varnothing \mid n,\ k \in Z$.

§ 7

402. $]2\pi n;\ \pi + 2\pi n[,\ n \in Z$. 403. $]2\pi n + \pi;\ 2\pi n + 2\pi[,\ n \in Z$.

404. $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z$. 405. $\left]2\pi n - \frac{\pi}{4};\ 2\pi n + \frac{5\pi}{5}\right[,\ n \in Z$.

406. $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{2} \mid n \in Z\right\}$. 407. $\left]\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right[,\ n \in Z$.

408. $\left]2\pi n - \frac{\pi}{2};\ 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right[,\ n \in Z$. 409. $\left]2\pi n + \frac{\pi}{2};\ 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right[,\ n \in Z$.

410. $\left[2\pi n - \frac{\pi}{3};\ 2\pi n + \frac{\pi}{3}\right],\ n \in Z$. 411. $\left]2\pi n + \frac{3\pi}{4};\ 2\pi n + \frac{5\pi}{4}\right[,\ n \in Z$.

412. $\{2\pi n \mid n \in Z\}$. 413. $\left]\pi n;\ \pi n + \frac{\pi}{2}\right[,\ n \in Z$. 414. $\left]\pi n - \frac{\pi}{2};\ \pi n\right[,\ n \in Z$.

415. $\left[\pi n + \frac{\pi}{4};\ \pi n + \frac{\pi}{2}\right[,\ n \in Z$. 416. $\left]\pi n - \frac{\pi}{2};\ \pi n - \frac{\pi}{3}\right[,\ n \in Z$.

417. $\left]2\pi n - \frac{\pi}{3};\ 2\pi n + \frac{2\pi}{3}\right[,\ n \in Z$. 418. $\left]\pi n + \frac{\pi}{4};\ \pi n + \frac{\pi}{3}\right[,\ n \in Z$.

419. $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{2\pi}{3} + \pi n\right],\ |n \in Z$.

420. $\left[2\pi n - \frac{7\pi}{6};\ 2\pi n + \frac{\pi}{6}\right],\ n \in Z$.

421. $\left[2\pi n + \arcsin\frac{1}{5};\ 2\pi n + \pi - \arcsin\frac{1}{5}\right],\ n \in Z$.

422. $\left[2\pi n + \arcsin\frac{1}{5};\ 2\pi n + \pi - \arcsin\frac{1}{5}\right],\ n \in Z$.

423. $[4\pi n;\ 4\pi n + 2\pi],\ n \in Z$.

424. $\left]2\pi n - \pi + \arccos\frac{1}{4};\ 2\pi n + \pi - \arccos\frac{1}{4}\right[,\ n \in Z$.

425. $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{2}\right\} \cup [2\pi n + \pi;\ 2\pi n + 2\pi],\ n \in Z$.

426. $\left[2\pi n - \frac{\pi}{3};\ 2\pi n + \frac{\pi}{3}\right],\ n \in Z$. 427. $\left]-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right[,\ n \in Z$.

Глава III

§ 1

19. $\sqrt{4m^2 - b^2}$. 20. $m,\ 2m,\ m\sqrt{3}$. 21. $4/3m$. 22. $\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{a^2 + b^2}$.

23. $\sqrt{\frac{b^2 + 4m^2 - 2c^2}{2}}$. 24. $\frac{a+c}{b},\ \frac{a+b}{c},\ \frac{b+c}{a}$. 25. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

26. $\frac{28}{9}$. 27. $b,\ \frac{b(\sqrt{5}+1)}{2}$. 28. $\frac{ab}{a+b},\ \frac{a+b}{b}$. 29. $\frac{1}{k}$. 30. $4\sqrt{30}$.

31. $\frac{a^2+b^2}{a}$, $\frac{a^2+b^2}{b}$, $\frac{(a^2+b^2)^2}{2ab}$. 32. $\frac{2m}{\sqrt{3}}$. 33. 8. 34. $\frac{\alpha}{2}$.

35. $\frac{2}{3}ab$. 36. $\frac{11}{40}s$. 37. $\arccos\frac{4}{5}$. 38. $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$.

39. $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{c+b}$. 40. $\frac{2ks}{k+1}$.

§ 2

16. $m+n$, $m-n$. 17. $a-2b$. 18. $\frac{a^2+ac-b^2}{a}$. 19. $\frac{1-k}{1+k}$. 20. $\frac{l_1 l_2}{2}$.

21. $45°$. 22. $\arcsin\frac{1}{4}$. 23. $\frac{2ab}{a+b}$. 24. $\frac{2mn}{(m+n)^2}Q$. 25. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

§ 3

13. $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a+c-b}{2}$, $\frac{b+c-a}{2}$. 14. $2\sqrt{Rr}$. 15. $\frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$.

16. $\sqrt{ab}$. 17. $\frac{Ra}{\sqrt{4R^2-a^2}}$. 18. $2(R^2-a^2)$. 19. $6r$. 20. $2a$.

21. s_1+s_2. 22. $\frac{k^2}{4}$. 23. 40. 24. $\frac{9}{7+4\sqrt{3}}$. 25. $2\arcsin\frac{R-r}{R+r}$.

§ 4

20. $\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$.

21. 1) 84; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{85}{8}$; 4) $\frac{84}{5}$.

22. $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, $\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, где n — число сторон.

23. $2R\sin\frac{\pi}{n}$, $2r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, где n — число сторон.

24. $\frac{r}{2\cos\frac{\pi}{n}}$. 25. $\frac{a}{\cos\frac{\pi}{n}}$. 26. $\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. 27. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

28. $2:1$. 29. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 30. $\frac{2m}{\sqrt{3}}$.

31. $\frac{R^2}{\sqrt{4R^2-b^2}}$, $2R>b$. 32. $\frac{4R^3}{S}$. 33. l^2+m^2. 34. r^2+2Rr. 35. $\frac{P}{4}$.

36. $2\sqrt{ab}(a+b)$. 37. $\frac{5\sqrt{13}}{4}$. 38. $\frac{1}{2\pi}\,\frac{q^2+p^2}{pq}$. 39. $\frac{a}{2\cos\alpha}$.

40. $3:4$. 41. a. 42. $\sqrt{r_1^2-r_2^2}$ $(r_1>r_2)$. 43. $R\sqrt{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

44. $\frac{11}{21}\,\frac{S}{r}$. 45. $\sqrt{m^2+n^2}$, $(n^2-m^2)\sqrt{m^2+n^2}$. 46. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. 47. $\frac{a\operatorname{ctg}\varphi}{2}$.

48. $\frac{a^2\sin 2\beta}{2}$. 49. $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. 50. $2R^2\sin^3\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)$.

51. $\frac{a}{2\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. 52. $R\sqrt{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$.

53. $\frac{l^2+m^2+2lm\cos 2\varphi}{4\sin^2 2\varphi}$. 54. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 55. $\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$.

§ 5

3. $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2-Rr+r^2}}$. 4. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$. 5. $\frac{4r\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. 6. $2\sqrt{55}$.

7. $\frac{2R^2\sin^3\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 8. $2R(4+\sqrt{3})$. 9. $\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 10. 4,5.

11. $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$. 12. $\frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}$. 13. $\frac{\pi}{3}$. 14. $\frac{l^2}{a}$. 15. $\frac{4a\cos^2\alpha}{1+4\cos^2\alpha}$.
16. $\frac{b^2\sin 2\alpha}{6}$. 17. $\frac{a^2\sin 2\alpha}{4}$. 18. $\frac{4R}{3}$.

Глава IV

§ 1

1. 7 см. 2. $8\sqrt{3}$ см, 8 см. 3. $2\sqrt{5}$ см. 4. 3 см. 5. $\frac{16}{3}$ см.
6. $2\sqrt{7}$ см. 7. $\sqrt{95}$ см. 8. $2\arccos\frac{3}{4}$, $\arccos\frac{3}{4}$. 9. $12\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
10. 8 см, $2\sqrt{66}$ см. 11. 45°. 12. $2\arcsin\left(\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\alpha}\right)$. 13. 30°.
14. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. 15. $\arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$, $0<\beta<\alpha$. 16. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}$. 19. 45°.
20. $\arccos\frac{1}{3}$. 21. $\frac{32}{6}$, $\frac{7}{5}$. 22. $\arccos(\sin\varphi,\ \sin\psi)$. 23. 45°.
24. 90°. 25. 60°. 26. 45°. 27. $\arccos\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$,
$\arccos\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$, $\arccos\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. 28. $\arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right)$.
29. $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$. 30. $\arccos\left(\frac{\sqrt{4\sin^2\beta/2-1}}{\sqrt{3}\sin\beta/2}\right)$.
31. $\arccos\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
32. $\frac{a}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 33. $2\arcsin\sqrt{\frac{3}{4-\cos^2\alpha}}$. 34. $\frac{a\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

35. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. 36. $\frac{a}{2\sqrt{1-2\cos\beta}}$. 37. 1) $\arccos\frac{1}{3}$; 2) $\arccos\frac{2}{3}$.
38. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. 39. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$. 40. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 41. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+l^2}$.
42. $\sqrt{c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$, $\sqrt{b^2+\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{4}}$, $\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}}$. 43. $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 44. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

§ 2

3. $56\sqrt{7}$ см². 4. $(66+28\sqrt{2})$ см². 5. $3\sqrt{3}r^2\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$. 6. $\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{4\cos\varphi}$.
7. $\frac{R^2\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}$. 8. $2R^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1\right)$. 9. $40(3+\sqrt{3})$ дм².
10. $\frac{l^2\sin\alpha}{2\cos\varphi}$. 11. $2a\sqrt{h^2+\frac{a^2\sin^2\alpha}{4}}$. 12. $\frac{6l^2}{\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\varphi}}$.
13. $a\sqrt{3}r^3\operatorname{ctg}\varphi/2$; $a\sqrt{3}r^3\operatorname{tg}\varphi/2$. 14. $\frac{d^3}{6}$ см³. 15. $1260\sqrt{3}$ см³.
16. $\frac{l^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{2}$. 17. $\frac{1}{2}l_1l_2^2\sin\varphi\operatorname{tg}\alpha$. 18. $\frac{abl}{2}\sin\alpha$. 19. $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$.
20. $\frac{R^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$. 21. $\frac{\sqrt{2}}{3}S^{3/2}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi$. 22. 108 см³.
23. $\frac{1}{12}\frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\operatorname{ctg}\varphi$. 24. $h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\alpha$. 25. $\frac{9\sqrt{7}}{128}$ см³.
26. $\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 27. $\frac{1}{3}a^3\sqrt{3}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
28. $\frac{4}{3}l^3\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\frac{1}{\left(1+4\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)^{3/2}}$. 29. $\frac{320\sqrt{2}}{3}$ см³. 30. $a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi$.
31. $\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\varphi$. 32. $\frac{3}{4}a^3$. 33. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}\varphi(a^3-b^3)$.

§ 3

8. $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$. 10. $\frac{5a}{12}\sqrt{3(9a^2+4b^2)}$. 11. $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. 12. $15\sqrt{5}$ дм^2.

13. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. 14. $\frac{3a\sqrt{2h^2+a^2}}{4}$. 15. $\frac{7}{8}\,\frac{a^2}{\cos\alpha}$. 16. $4R^2/\sin\alpha\,\cos\varphi$.

17. $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. 18. 11:21. 19. 24 дм^2, 30°. 20. $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\beta+\varphi)}$.

21. 13:23. 22. $\frac{V}{6}$. 23. $\frac{ah}{3\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{9}}}$. 24. $\frac{a^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$.

25. $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2\,\frac{\sin 2\alpha\,\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. 26. $\frac{d^2}{2}\,\frac{\sin\alpha\,\sin\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\sqrt{\frac{4}{9}\cos^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$.

27. $\frac{l^2}{4}\,\frac{\cos\beta\,\sin^2 2\beta\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos 2\beta}$.

§ 4

2. $\frac{d^2\sin 2\alpha}{2}+\frac{d^2\cos^2\alpha}{2\pi}$. 3. $\sqrt{a^2+\left(\frac{S}{SH}\right)^2}$. 4. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{8}{\pi}$.

5. $\frac{\pi l^2}{2}\sin 2\alpha$, $\frac{\pi l^3}{4}\sin\alpha\cos^2\alpha$. 6. $\frac{\pi S}{\sin\frac{2\pi}{5}}$. 7. $2h\sqrt{\frac{V}{\pi h}-a^2}$.

8. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}$. 9. $\mathrm{ctg}\,\varphi$. 10. Треугольник. 11. $\frac{l^2}{2}$. 12. $2\arcsin\frac{\varphi}{2\pi}$.

13. $2\arcsin\left(\frac{a}{2R}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 14. $2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. 15. $\frac{\pi\,\mathrm{tg}\,\varphi}{24}\,\frac{a^3}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

16. $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 17. $\pi h^2(2{,}5+2\sqrt{2})$. 18. $\frac{5\sqrt{3}}{48}\pi a^3$.

19. $\frac{\pi}{3}(R^2-r^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 20. $\sqrt{3}\,\pi a^2$. 21. $x^2+y^2+z^2=6$.

22. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=8$. 27. $2\pi\sqrt{\frac{S}{4\pi}-a^2}$. 28. $\frac{14}{375}\pi R^3$.

29. $\frac{5}{12}\pi R^3$. 30. $\pi R^2\sin^2\alpha$. 31. $2\arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 32. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

33. $\frac{R}{3}$. 34. $1:2$, $1:2\sqrt{2}$. 35. $\frac{5\sqrt{3}}{108}\pi l^3$. 36. $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2}$.

37. $3:4$. 39. $4(\sqrt{2}-1)^3$. 40. $\left(\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2$. 42. $\frac{\pi l^3}{3}$, $\frac{3l}{4\sqrt{2}}$.

43. $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^{3/2}\mathrm{tg}\,\alpha$. 44. $R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta\,(1+\sin\beta)^{-1}$. 45. $\frac{\pi}{2}$.

46. $\frac{4S\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. 47. $\frac{\pi}{4}$. 48. $3:4$. 50. $4\pi\,\frac{R^2+r^2-2Rr\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

51. $\frac{4\pi R^2}{\sin^2\varphi}$, $\frac{2}{3}\pi R^3\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$. 52. $2\pi r^2\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

§ 5

9. $\frac{2\pi S\sin\alpha}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. 10. 1) $2\sqrt{3}-3$; 2) $\frac{\pi}{6}$. 11. $\frac{\sqrt{3}}{4}R^3\sin 2\gamma$.

12. $\frac{1}{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}$. 13. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sin 2\varphi}$. 14. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\alpha}+h^2}$.

15. $\frac{3\pi l^2}{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 16. $\frac{4\sin^2\alpha\cos\alpha}{3(1+\sin^2\alpha)^{3/2}}R^3$. 17. $\frac{\sqrt{3}}{4}d^3\,\mathrm{tg}^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

18. $\frac{\sqrt{3}}{4}l^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. 19. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{432}\left(\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\varphi+16}\right)^3$. 20. $\frac{a}{2}(2\sqrt{3}-3)$.

21. $\frac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. 22. $\frac{S}{\pi\sin\alpha}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 23. $\frac{a}{\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta)}$.

24. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\varphi}}{\sqrt{2}\sin 2\varphi}$. 25. $\frac{4}{3}R^3\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. 26. $\frac{8a^3}{3}\frac{\cos^2\alpha\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

27. $\frac{16R^2}{\sin^2\alpha}$. 28. $\frac{b}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$, $\frac{b}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$. 29. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$.

30. $\frac{15\sqrt{10}R}{4(5+\sqrt{30})}$. 31. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h\left(1-\frac{a}{\sqrt{l^2-h^2}}\right)$. 32. $\frac{\pi a^2\sqrt{\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}{4\sin^2\operatorname{ctg}\beta}$.

§ 6

1. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2. $\frac{p}{4}$, $\frac{3p}{8}$, $\frac{3p}{8}$. 3. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{2\pi l^3}{9}\sqrt{3}$. 4. $\sqrt{2}R$.

5. $\frac{4}{3}R$. 6. $R\sqrt{3}$. 7. $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}\sqrt{2}}$. 8. $\arccos(\sqrt{2}-1)$. 9. $\operatorname{arctg}(3-\sqrt{3})$.

10. $\frac{4}{27}Ha^2$. 11. $h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\frac{h^2}{1+\cos\alpha}$, если $\frac{\pi}{2}\le\alpha<\pi$.

12. $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$. 13. 28 $см^3$. 14. $\frac{5}{18}V$. 15. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{9+\sqrt{77}}$.

16. $\frac{1}{42}a^2b\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$. 17. $\frac{1}{18}\frac{l_1^2l_2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

18. $2\sqrt[4]{2}R^2$, $\arccos\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$. 19. $\frac{R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)^2}$. 20. $\frac{a^3}{48}\operatorname{tg}^2\beta\sin 2\alpha$,

$\frac{a^2b}{8}\operatorname{tg}^2\beta\sin^2\alpha-\frac{a^3}{48}\operatorname{tg}^2\beta\sin 2\alpha$. 21. $\frac{\pi d^3\cos^3\beta}{108\sqrt{3}}$. 22. $2C\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$,

если точки A и B лежат по одну сторону от плоскости γ; 0 – если точки A и B лежат по разные стороны от γ.

23. $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sin\beta-\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}\right)\right]$. 24. 1) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$;

2) $\left(\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right):\left(\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$.

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

ВАРИАНТ № 1 (1982 г.)

1. $]-1;\ \log_2 6]$. 2. $\frac{5}{3}(2k-3)$ при $\frac{3}{2}<k\le\frac{5}{2}$; $\frac{2S}{3}$ при $\frac{5}{2}\le k<+\infty$.

3. $d^3\cos^2\varphi\sin\varphi\sin\alpha\sin 2\alpha/3\sin 3\alpha$, если ортогональная проекция вершины S на плоскость основания пирамиды принадлежит четырехугольнику $ABCD$ и $\frac{d^3\cos^2\varphi\sin\varphi\sin 2\alpha}{3}$ в противном случае.

4. $\left\{2\pi n\pm\arccos\left(\frac{a-1}{5}\right)-\arcsin\frac{4}{5}\,|\,n\in Z\right\}$ при $a\in[-4;\ 1]\cup\{6\}$; функция критических точек не имеет, если $a\in]-\infty;\ 4[\cup]6;\ \infty[$.

ВАРИАНТ № 2 (1982 г.)

1. $\left\{\left(n+\frac{1}{3}\right)^2\pi^2|n\in Z_0\right\}$. 2. 77 и 86.

3. $\left]2a+3;\ \frac{7a+13}{3}\right]$ при $a\in]-4;\ \infty]$; $\varnothing$ при $a\in]-\infty;\ -4[$.

4. $\frac{d^2\sin^2\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{12\cos^3\frac{\beta}{2}}\sqrt{9+16\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}$ при $0<\beta\le\frac{\pi}{2}$;

$\frac{d^2\sin^2\alpha\sin\beta}{6}\sqrt{9+16\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}$ при $\frac{\pi}{2}\le\beta<\pi$.

ВАРИАНТ № 1 (1983 г.)

1. $\left\{\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{6}\,\middle|\,n\in N\right\}$.

2. $\left\{\frac{8a+1}{10}\right\}$ при $a\in\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[$; уравнение решений не имеет при $a\in\left[\frac{1}{2};\ \infty\right[$.

3. $V_1=\frac{h^3}{3}\sin 2\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $V_2=\frac{h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\varphi}{3}(3b-2h\cos\varphi)$ при $h\cos\varphi<b$, $\varphi\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$; $V_1=\frac{b^3\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3\cos^2\varphi}$, $V_2=\frac{b\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\varphi}{3\cos^2\varphi}(3h^2\cos^2\varphi-b^2)$ при $h\cos\varphi\ge b$, $\varphi\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

4. 2 альбома и 12 книг или 5 альбомов и 10 книг.

ВАРИАНТ № 2 (1983 г.)

1. $d=-\frac{p}{q}$ при $q\ne 0$; $d\in]-\infty;\ +\infty[$ при $q=p=0$. При $q=0$, $p\ne 0$ задача решений не имеет.

2. $S_1=\frac{48\sqrt{3}}{49}k^2\cos^2\varphi$, $S_2=\frac{48\sqrt{3}\,k^2(1+3\cos^2\varphi)^2\cos^2\varphi}{49(1-9\cos^2\varphi)^2}$ при $\varphi\in\left]\arccos\frac{1}{5};\ \frac{\pi}{2}\right[$; $S_1=\frac{48\sqrt{3}}{49}k^2\cos^2\varphi$;
$S_2=\frac{3\sqrt{3}\,k^2(1+3\cos^2\varphi)^2}{784\cos^2\varphi}$ при $\varphi\in\left]0;\ \arccos\frac{1}{5}\right]$.

3. $]-\infty;\ +\infty[$ при $c\in[3;\ +\infty[$; $\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\log_5\frac{3c+4}{3-c}\right[$ при $c\in\left]-\frac{4}{3};\ 3\right[$. При $c\in\left]-\infty;\ -\frac{4}{3}\right]$ функция не имеет промежутков возрастания.

4. $\left\{3\pi n+\frac{3}{2}\pi,\ \pi n+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{13}}\,\middle|\,k\in Z\right\}$.

ВАРИАНТ № 1 (1984 г.)

1. $\left\{2\pi n\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)\middle|\,n\in Z\right\}$.

2. При $q<15\%$ решения нет, при $15\%\le q\le 25\%$ $\frac{25-q}{5}\le x\le 2$, $y=2-x$, где x и y – количество литров раствора, взятых из первого и второго сосудов соответственно. При $25\%\le q\le 100\%$ x, y – любые числа, удовлетворяющие соотношениям $x+y=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

3. $\left\{\frac{c^4+2c^2+25}{c^2}\right\}$ при $c\in]0;\ \sqrt{5}]$, $\varnothing$ при $c\notin]0;\ \sqrt{5}]$. H J.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{4}h^2\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta$ при $\beta\in]0;\ \mathrm{arctg}\sqrt{2}[$; $\frac{\sqrt{3}}{4}h^2\,\mathrm{tg}\,\beta\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\beta}$ при $\beta\in\left[\mathrm{arctg}\sqrt{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

ВАРИАНТ № 2 (1984 г.)

1. $\{-7\}\cup[-6{,}3;\ -6[\cup]-6;\ -5]$.

2. При $\frac{449}{26}<p<\frac{525}{26}$ скорость движения парохода по озеру равна $76/(55-2p)$. При $p\notin\left]\frac{449}{26};\ \frac{525}{26}\right[$ $(p>0)$ решения нет.

3. $]-\infty;\ 2]\cup\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}\cup]4;\ +\infty[$.

4. $\frac{r\sqrt{2}}{6}\,\mathrm{tg}\,\gamma$ при $r>\frac{3\sqrt{2}}{4}a$; $\frac{r\sqrt{2}-a}{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma$ при $\frac{a\sqrt{2}}{2}<r\le\frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

ВАРИАНТ № 1 (1985 г.)

1. $A\in\{36;\ 45;\ 54;\ 63\}$.

2. $x=\log_3(1+\sqrt{1-a})$ при $a\in]-\infty;\ 0]$; $x_{1,2}=\log_3(1\pm\sqrt{1-a})$ при $a\in]0;\ 1]$; решений нет при $a\in]1;\ \infty]$.

3. $x \in [1;\ \infty[$ при $b = 0$; $x_1 = 1 + \left(\frac{2k\pi}{b}\right)^2$, $k \in Z$; $x_2 = 1 + \left(\frac{2\pi}{3b}\right)^2 (1+3k)^2$, $k \in Z$, $k \ge 0$ при $b \in]0;\ \infty[$; $x_1 = 1 + \left(\frac{2k\pi}{b}\right)^2$, $k \in Z$; $x_2 = 1 + \left(\frac{3\pi}{3b}\right)^2 (1+3k)^2$, $k \in Z$, $k < 0$ при $b \in]-\infty;\ 0[$.

4. $S_1 = \frac{hk^3}{4k^2 - h^2}$, $S_2 = \frac{kh(k^2 - h^2)}{4k^2 - h^2}$, если $\frac{h}{k} \in]0;\ 1[$; $S = \frac{hk^3}{4k^2 - h^2}$, если $\frac{h}{k} \in [1;\ \sqrt{3}[$.

ВАРИАНТ № 2 (1985 г.)

1. 85. 2. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in Z\right\}$; 12. 3. Если $a \in]5;\ \infty[$, то $\left\{\frac{a-1}{2};\ -\frac{a+1}{2}\right\}$, $a = 5$; $x \in [-3;\ 5]$; $a \in]-\infty;\ 5[$, $\varnothing$.

4. $S = \frac{d^2 \operatorname{tg}^2\alpha \sin\alpha}{8(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)}$, $\alpha \in \left[\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}};\ \frac{\pi}{2}\right[$; $S = \frac{d^2 \operatorname{tg}\alpha}{16\cos\alpha}(15 - 9\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha)$, $\alpha \in \left]0;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

ВАРИАНТ № 1 (1986 г.)

1. $x \in [-2;\ 0] \cup]1;\ \infty[$. 2. $a \in]-\infty;\ -\sqrt{10}[\cup]-\sqrt{6};\ 0[\cup \{3\} \cup]12;\ \infty[$.

3. При $\alpha \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ $V = \frac{2}{3}R^3 \sin^2\alpha\,(1+\cos\alpha)\sin\varphi$; при $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$ $V_1 = \frac{2}{3}R^3 \sin^2\alpha\,(1+\cos\alpha)\sin\varphi$, $V_2 = \frac{2}{3}R^3 \sin\alpha\,(1+\cos\alpha)^2 \sin\varphi$.

4. $v_1 = 11$ м/с; $v_2 = \frac{29}{3}$ м/с.

ВАРИАНТ № 2 (1986 г.)

1. $x \in \left]\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ \infty\right[$. 2. Первая бригада может выполнить всю работу за $\frac{3a}{a-3}$ дней; задача имеет решение при $a \in]3;\ 6[$.

3. $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n\right) \mid k,\ n \in Z\right\}$.

4. $S_0 = \frac{l^2 \sin^2\alpha}{(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha - 1)^2}$; задача имеет решение при $\alpha \in \left]\operatorname{arctg}\sqrt{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

ВАРИАНТ № 1 (1987 г.)

1. $\left\{(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z\right\}$. 2. $\frac{2m + 1 + \sqrt{4m^2+1}}{4}$.

3. $x \in \left[1;\ 1 + \log_3^2\frac{c+1}{c+2}\right[$ при $c \in]-\infty;\ -2[$, $x \in [1;\ +\infty[$ при $c \in [-2;\ +\infty[$.

4. $S_1 = \frac{\pi h^2}{4}\left(\frac{3\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + 1}\right)$; $S_2 = \pi h^2 \left(\frac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\frac{\pi}{4} < \alpha \le \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$; $S_2 = \pi h^2 \left(\frac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ № 2 (1987 г.)

1. $x \in [2;\ 3[\cup \left]3;\ \frac{7}{2}\right] \cup \{4\}$. 2. $\frac{3(10-p)}{2(p-5)}$, где $p \in \left[\frac{50}{7};\ 10\right]$.

3. $\{(\pi + 4\pi n;\ 2\pi k) \mid n,\ k \in Z\}$ при $a \in \{-1;\ 3\}$.

4. $R = \frac{d}{2\sin\alpha\,|\cos 2\alpha|}$, $R = \frac{d}{2\sin\alpha}$, если $\alpha \ne \frac{\pi}{4}$; $R = \frac{d}{\sqrt{\pi}}$, если $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

ВАРИАНТ № 1 (1988 г.)

1. $\{1\}$. 2. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a} + \pi k$; $k \in Z$ при $a \in]-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty[$; $\{\varnothing\}$ при $a \in]-1;\ 1[$. 3. 1791.

4. $S_1 = l^2\cos^2\beta\sin\alpha\cos\alpha$, $S_2 = \frac{3}{4}l^2\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\alpha}$,

$S_3 = \frac{3}{4}l^2\cos\beta\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2\alpha}$ при $x \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\beta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

ВАРИАНТ № 2 (1988 г.)

1. $x \in]-\infty;\ -6] \cup]-2;\ +\infty[$.

2. $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\ 2\pi m \mid m,\ n \in Z\right\}$ при $c = 85$; $\{\varnothing\}$, при $c \neq 85$.

3. При $c \in \left[35;\ 35\frac{5}{6}\right[$ концентрация кислоты в четвертом сосуде больше, чем в третьем; при $c \in \left]35\frac{5}{6};\ 37\right]$ концентрация кислоты в третьем сосуде больше, чем в четвертом. При других значениях c задача не имеет решения.

4. $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3}$ при $\alpha \in \left]0;\ \frac{\pi}{3}\right[$. При $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3};\ \pi\right[$ задача не имеет решения.

ВАРИАНТ № 1 (1989 г.)

1. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ k,\ n \in Z\right\}$. 2. 125.

3. 1) при $c \in (-\infty;\ -3) \to x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^c - 19}$;

2) $x = -3 \to x \in \{3-2\sqrt{2};\ 3;\ 3+2\sqrt{2}\}$;

3) $c \in (-3;\ \log_{1/3}23) \to x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^c - 19}$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{27-\left(\frac{1}{3}\right)^c}$;

4) $c = \log_{1/3}23 \to x_1 = 1$, $x_2 = 5$; 5) $c > \log_{1/3}23 \to x \in \varnothing$.

4. $\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}q}{q+1}\right)\mathrm{ctg}\,\varphi$; $q \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$, $\varphi \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

ВАРИАНТ № 2 (1989 г.)

1. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\ n \in Z\right\}$. 2. $\frac{1}{9}(4780-40a)$ при $a \in \left(25;\ \frac{65}{2}\right)$.

3. 1) $a = 2 \to x \in (5;\ +\infty)$; 2) $a \in (8;\ +\infty) \to x = \frac{a+2}{2}$;

3) при других $a \to x \in \varnothing$.

4. $S = \frac{3\sqrt{3}}{8}h^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma\sqrt{1+4\,\mathrm{ctg}^2\gamma}$.

ВАРИАНТ № 1 (1990 г.)

1. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\mathrm{arctg}\,2+2\pi k$, n, $k \in Z$. 2. 258. 3. $\left]\frac{1}{4};\ \frac{11}{4}\right]$.

4. 1) при $0 \le m < \frac{1}{3} \to \frac{\sqrt{6}}{9}l^2\frac{1+3m}{(1+m)^2}\sqrt{1-m}$ и $\frac{\sqrt{6}}{9}l^2\frac{1-3m}{(1+m)^2}\sqrt{1+m}$;

2) при $\frac{1}{3} \le m < 1 \to \frac{\sqrt{6}}{9}\frac{1+3m}{(1+m)^2}\sqrt{1-m}\,l^2$; 3) при $m \ge 1$ нет решений.

ВАРИАНТ № 2 (1990 г.)

1. πn; $\frac{1}{10}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi}{5}k$, $\frac{1}{6}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi}{3}m$, n, k, $m \in Z$. 2. 20 часов.

3. 1) при $k \in [3-\sqrt{8};\ 1[\ \cup [3+\sqrt{8};\ +\infty[\to x = -\log_2\frac{k^2-1}{2(k-3)}$;

2) при $k \in]-\infty;\ 3-\sqrt{8}[\ \cup [1;\ 3+\sqrt{8}[\to x \in \varnothing$.

4. $\frac{4}{9}\pi l^3\cos\alpha\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}$ – случай правильной пирамиды;

$\frac{4}{3}\pi l^3\frac{\cos\alpha\sin^4\alpha}{4\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{4\sin^2\alpha-1}{4\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}}$;

$\frac{4}{3}\pi l^3\frac{\sin\alpha\cos^4\alpha}{4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\sqrt{\frac{4\cos^2\alpha-1}{4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}$.