



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ "МИФИ"

# **СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

*ДЛЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ КУРСОВ ЦДП*

МОСКВА 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

---

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Для подготовительных курсов ЦДП

Под редакцией А.И. Забоева и В.Н. Цикунова

*6-е издание, без изменений*

Москва 2011

Сборник задач по алгебре и началам анализа. Для подготовительных курсов ЦДП. Под ред. А.И. Забоева и В.Н. Цикунова: Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ. 2011. – 96 с.

(Воронова Т.Я., Забоев А.И., Иванов А.С., Крючков В.С., Мирошин Н.В., Мусатов В.И., Цикунов В.Н.)

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с программой по математике для дневных подготовительных отделений. Задачи систематизированы по темам, расположены, как правило, в порядке возрастания трудности.

Данное пособие предназначено для подготовительных курсов ЦДП.

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ в качестве учебного пособия

© Московский государственный инженерно-физический институт  
(технический университет), 1991

© Московский инженерно-физический институт,  
(государственный университет), 2009

© Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ», 2011

Подписано в печать 19.09.2011. Формат 60×84 1/16.  
Печ. л. 6,0. Тираж 350 экз. Заказ № 270.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».  
Типография НИЯУ МИФИ.  
115409, Москва, Каширское ш., 31.

## ЗАДАЧИ

### § 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Выполните действия:

$$1. \frac{3\frac{1}{3} : 10 + 0,175 : 0,35}{1,75 - 1\frac{11}{17} \cdot \frac{51}{56}} \quad 2. \frac{\left(17\frac{1}{3} : 19\frac{1}{2} + 1\frac{1}{12}\right) \cdot 3 + 3\frac{7}{12}}{1\frac{23}{50} - 3,06 : (55,65 : 5,3 - 4,5)}$$

$$3. \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot (-1,6) + \left(-1\frac{4}{7}\right) : (-3,3) \cdot \left(-3\frac{4}{15}\right).$$

$$4. (+6,25) - \left(+9\frac{3}{4}\right) - (+16,2) : (-0,81) - \left(-3\frac{2}{7}\right).$$

$$5. \left(-1\frac{1}{9}\right) \cdot (-0,3)^2 \quad 6. (+8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5.$$

Найдите числовое значение выражений:

$$7. 3a^2 - 2b^3 \text{ при } a = -0,1, b = -0,2.$$

$$8. \frac{3a^2b + 2ab^2 - 1}{2a - b} \text{ при } a = -\frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}.$$

$$9. abc - (3a^2b - (4abc + (2ab^2 + 3a^2b))) \text{ при } a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{2}{3}, c = -4.$$

$$10. 9a^2 + (7a^2 - 2a - (a^2 - 3a)) \text{ при } a = -3; a = -\frac{1}{4}.$$

Выполните действия:

$$11. (-0,6x^2y^3)(+0,5x^3y^3). \quad 12. (+2,4k^2b^4) \cdot (-0,5k^3).$$

$$13. (3x^n y^m)^2 (-2x^n y^{2m})^3. \quad 14. (-2a^k)^3 (3a^2)^2.$$

$$15. (2a - 3b)(2a + 3b). \quad 16. (a^{n+2} - b^n)(a^{n+2} + b^n).$$

$$17. (5x - 2y)^2. \quad 18. (2x + 0,2)^2.$$

$$19. \left(\frac{2}{3}x^{m-x} + \frac{3}{4}x^{2m+1}\right)^2 \quad 20. \left(\frac{5}{6}x^{2n-1}y^n - \frac{3}{5}x^{n+1}y^2\right)^2$$

$$21. (2a-3)^3 \quad 22. (4x^3+5y^2)^3$$

$$23. (a+1)(a^2-a+1) \quad 24. (x-2)(x^2+2x+4)$$

$$25. a(a+2)(a-2) - (a-3)(a^2+3a+9)$$

$$26. 3(m-1)^2 + (m+2)(m^2-2m+4) - (m+1)^3$$

Разложите на множители:

$$27. m^3+n^3+m^2n+mn^2 \quad 28. m^3-n^3+m^2n-mn^2$$

$$29. x^3y-2x^2y^2+xy^3 \quad 30. a^3-2a^2+a$$

$$31. z^{2k+1}-z^{2k-1} \quad 32. x^{p-1}-x^{p+3}$$

$$33. c^2(n-k) + (k-n) \quad 34. a^2(x-1) - b^2(1-x)$$

$$35. (x-1)^3+8 \quad 36. a^2-2ax+x^2-b^2$$

$$37. a^2+a-6 \quad 38. a^2-4a+3$$

$$39. 6a^2-5a-4 \quad 40. 10k^2+13k-3$$

$$41. a^2+3ab+2b^2 \quad 42. 2y-y^2-6x+9x^2$$

$$43. a^3+9a^2+26a+24 \quad 44. (ab+ac+bc)(a+b+c) - abc$$

Упростите выражения:

$$45. \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$$

$$46. \left(p-q + \frac{4q^2-p^2}{p+q}\right) : \left(\frac{p}{p^2-q^2} + \frac{2}{q-p} + \frac{1}{p+q}\right)$$

$$47. \left(\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{2-p} + \frac{1}{p+2}\right) : \left(p-2 + \frac{10-p^2}{p+2}\right)$$

$$48. \left(\frac{9x^2+1}{9x^2-6x+1} - \frac{1}{27x^3-9x^2-3x+1} : \frac{1}{27x^3+1}\right) \cdot (27x^3-18x^2+3x)$$

$$49. \frac{20x}{1-5x} - \left(\frac{10x+2}{3-5x}\right)^2 \left[\frac{5x+9}{25x^2+10x+1} - \frac{10x}{25x^2-1}\right]$$

$$50. \left[1,5 - \left(x^4 - \frac{x^4+1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right] : \frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$$

$$51. \left(\frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$$

$$52. \frac{1}{(x-y)^3} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right) + \frac{2}{(x-y)^4} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right) + \frac{2}{(x-y)^5} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

53. Найдите зависимость между  $a$ ,  $b$  и  $c$ , если существуют такие  $x$  и  $y$ , что  $a=x+y$ ,  $b=x^2+y^2$ ,  $c=x^3+y^3$ .

54. Докажите, что если  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ , то одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  отличается от другого лишь знаком.

Запишите без знака модуля:

$$55. |1-\sqrt{2}|$$

$$56. |\sqrt{5}-3|$$

$$57. |3-\sqrt{5}|$$

$$58. |5-a|, \text{ если } a \in [-\infty; 5];$$

$$\text{если } a \in [5; +\infty[.$$

Упростите выражения:

$$59. M = x + |x-3|$$

$$60. N = |x| + x$$

$$61. M = |x| + |x-2|$$

$$62. N = |x-3| + |x-1|$$

$$63. M = \frac{x-1}{x|x-1|}$$

$$64. N = x + |x-3| + |x-5|$$

$$65. M = x + |2x-2| + |x-3|$$

$$66. N = |a-1| + a-2 + |3a-6|$$

$$67. M = \frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$$

$$68. N = \frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}$$

Выполните действия:

$$69. 2^3 \cdot 2^4$$

$$70. 3^{-4} \cdot 3^6$$

71.  $25 : 5^{-3}$ .

72.  $3^{-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^0$ .

73.  $\frac{(-5)^{-5} \cdot 25^{16}}{125^8}$ .

74.  $\frac{7 \cdot 9^8 + 6 \cdot 27^5}{81^4}$ .

75.  $\frac{12^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{9}}}{2^{1,5} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}$ .

76.  $15^{-2} \cdot 45^{\frac{1}{3}} \cdot 75^{-1\frac{1}{3}}$ .

77.  $\frac{3^8 \cdot 9^{-2} \cdot 5^4 + 9 \cdot 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{(3 \cdot 5)^4 \cdot 3^{-3}}$ .

78.  $\left[\frac{(y-x)^2}{x}\right]^n : \frac{(x-y)^{2n-1}}{x^{n+1}}$ .

79.  $\left(\frac{49}{c+27} - \frac{c^{\frac{1}{3}}+3}{c^{\frac{2}{3}}-3c^{\frac{1}{3}}+9}\right) \cdot \frac{c^{\frac{4}{3}}+27c^{\frac{1}{3}}}{16-c^{\frac{2}{3}}} + \frac{40-c^{\frac{2}{3}}}{4+c^{\frac{1}{3}}}$ .

80.  $\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2-4x+3}$ .

Вынесите множитель из-под знака радикала:

81.  $\sqrt{32}; \sqrt{98}; \sqrt{63}$ .

82.  $\sqrt{450}; \sqrt{675}; \sqrt{280}$ .

83.  $\sqrt[5]{243x^{-28}a^{25}b^{-17}}$ .

84.  $\sqrt[5]{32a^{-25}(x-y)^{15}}$ .

85.  $\sqrt[3]{4^{n+2}a^{n+4}c^{3n}}$ .

86.  $\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+3n}c^{4(m+n)}}$ .

Выполните действия:

87.  $\sqrt{80} - \sqrt{27} + \sqrt{20} + \sqrt{300}$ .

88.  $3\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{80}$ .

89.  $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$ .

90.  $5\sqrt[4]{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} + \sqrt[4]{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}} - 11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$ .

91.  $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$ .

92.  $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ .

93.  $(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{3} - \sqrt{6})$ .

94.  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ .

95.  $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)$ .

96.  $(2 - \sqrt[3]{b})(4 + 2\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})$ .

97.  $(\sqrt{21} + 2\sqrt{14})^2$ .

98.  $(2\sqrt{3} - \sqrt{15})^2$ .

99.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$ .

100.  $\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt{2}$ .

101.  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}$ .

102.  $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2})$ .

Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

103.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

104.  $\frac{a}{b\sqrt{a}}$ .

105.  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ .

106.  $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$ .

107.  $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ .

108.  $\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}$ .

109.  $\frac{4}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}}$ .

110.  $\frac{4}{\sqrt[4]{13} - \sqrt[4]{9}}$ .

111.  $\frac{b-1}{\sqrt[3]{b}-1}$ .

112.  $\frac{b+1}{\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{b} + 1}$ .

113.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$ .

114.  $\frac{6}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ .

115.  $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}}$ .

116.  $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ .

117.  $\frac{\sqrt{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$ .

118.  $\frac{1}{\sqrt[3]{x-8} + 2}$ .

Какое из чисел больше:

119.  $A = \sqrt{2} - \sqrt{3}$  или  $B = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - 1$ ?

120.  $A = 18$  или  $B = 4\sqrt{5} + \sqrt{82}$ ?

При каких  $a$  и  $x$  справедливы равенства:

121.  $\sqrt{x^{14}} = -x^7$ .

122.  $\sqrt{a^{14}x^{10}} = -a^7x^5$ ?

123.  $\sqrt{x(x-2)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2}$ .

124.  $\sqrt{\frac{a-3}{a}} = \frac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{a}}$ ?

Упростите выражения:

125.  $\sqrt{a^2}$ . 126.  $\sqrt{(-23)^2}$ . 127.  $\sqrt{(a-1)^2}$ . 128.  $\sqrt{(x-4)^2}$ .

129.  $\sqrt{y^6}$  при  $y \in ]-\infty; 0[$ . 130.  $\sqrt{a^{10}}$  при  $a \in [0; +\infty[$ .

131.  $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ . 132.  $\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{10})^2}$ . 133.  $\sqrt[4]{(a-b)^4}$ .

134.  $\sqrt{(5-a)^2}$ . 135.  $\sqrt[4]{x^3(x-12)+54x(x-2)+81} + \sqrt{-x|x|}$ .

136.  $\sqrt{-x(x-2)^2} - \sqrt{-x^3}$ . 137.  $\sqrt{x^2-12x+36} - \sqrt{x^2}$ .

138.  $\sqrt{\frac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2} + \sqrt{(x+2)^2-8x}}$ . 139.  $\frac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}$ .

140.  $\left| \frac{x-2}{x-2} + 4 \right| \cdot (x^2-4)$ . 141.  $\frac{(x+2) \cdot \sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$ .

142.  $\frac{|2x-3|+6}{2x-3} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)}$ .

Выполните действия:

143.  $\frac{25^4\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5^4\sqrt{8}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{5}{\sqrt{2}}} + 2$ .

144.  $\left( \frac{8^{\frac{1}{4}}+2}{2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{3}}} - 4^{\frac{1}{3}} \right) : \left( \frac{8^{\frac{1}{4}}-2}{2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{3}}} - 3 \cdot 128^{\frac{1}{12}} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

145.  $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$ .

146.  $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - \left( \frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}} - \sqrt[4]{ax} \right)$ .

147.  $\frac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}} - \sqrt{4+x-4\sqrt{x}}$ ,  $x \in ]0; 4[$ .

148.  $\sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{4x^{-1}}} - 2 + \sqrt{\frac{1}{4x^{-1}} + \frac{2^{-2}}{x} + \frac{1}{2}}$ .

149.  $x^3+12x$ , если  $x = \sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$ .

150.  $x^3+3x-14$ , если  $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$ .

151.  $\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$ .

152.  $\frac{a+10\sqrt{a}+\sqrt{20}(\sqrt[4]{a^3}+5\sqrt[4]{a})+25}{(a-25)(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt{125})^{-1} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt[4]{25a+5})}$ .

## § 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Напишите формулу четного числа.
2. Напишите формулу нечетного числа.
3. Докажите, что сумма двух нечетных чисел — число четное.
4. Докажите, что сумма любых двух последовательных целых чисел не делится на 2.
5. Докажите, что произведение  $n(n+1) : 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
6. Докажите, что любое  $n \in \mathbb{N}$  можно представить в виде:
  - 1)  $3k-2$ ,  $3k-1$  или  $3k$ ;  $k \in \mathbb{N}$ ;
  - 2)  $5k$ ,  $5k-1$ ,  $5k-2$ ,  $5k-3$  или  $5k-4$ .
7. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел  $: 3$ .
8. Докажите, что  $\forall n \in \mathbb{N} (n^3-n) : 6$ .
9. Докажите, что если  $\forall m \in \mathbb{N} m^2 : 3$ , то  $m : 3$ .
10. Докажите, что сумма кубов последовательных трех натуральных чисел  $: 9$ .
11. Сумма двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке  $: 11$ . Докажите это.
12. Разность между трехзначным числом и числом, записанным этими же цифрами в обратном порядке  $: 9$ . Докажите это.

13. Найдите НОД чисел:

1) 36 и 54; 2) 19 и 95; 3) 17 и 23; 4) 135, 225 и 540.

14. Найдите НОК чисел:

1) 16 и 20; 2) 12 и 36; 3) 11 и 17; 4) 24, 117 и 495.

15. Докажите, что НОК нескольких чисел делится на их НОД.

16. Найдите натуральные числа  $a$  и  $b$  по следующим условиям:

1) НОД  $(a, b) = 13$ ; НОК  $(a, b) = 1989$ ;

2)  $a + b = 85$ ; НОК  $(a, b) = 102$ ;

3)  $a + b = 667$ ; НОК  $(a, b)$  / НОД  $(a, b) = 120$ ;

4) НОК  $(a, b) = 8100$ ;  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 48$ .

17. Докажите, что если  $p$  и  $2p + 1$  — простые числа,  $p \geq 5$ , то  $4p + 1$  — число составное.

18. Может ли сумма (произведение) двух иррациональных чисел быть числом рациональным?

19. Докажите, что сумма рационального и иррационального числа — число иррациональное.

20. Докажите, что  $\sqrt[3]{12}$  — число иррациональное.

### § 3. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

1. Укажите на числовой прямой множества всех решений каждого из следующих неравенств:

1)  $x > -2$ ; 2)  $x \geq 5$ ; 3)  $|x| > 3,2$ ; 4)  $|x| < 1$ ; 5)  $|x| \leq \pi$ ;

6)  $-2 \leq x \leq 2$ ; 7)  $x^2 \leq 9$ ; 8)  $7 < |x| < 11$ ; 9)  $10 < |x| < 16$ .

2. Докажите, что неравенство  $|x| < a$  равносильно двойному неравенству  $-a < x < a$ .

3. Докажите утверждение: для того, чтобы число  $x$  удовлетворяло неравенству  $|x| > a$ , необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло одному из двух неравенств:  $x > a$ ,  $x < -a$ .

4. Докажите, что неравенство  $|a| < |b|$ :

1) равносильно неравенству  $-b < a < b$ , если  $b > 0$ ;

2) равносильно неравенству  $b < a < -b$ , если  $b < 0$ .

5. Укажите все целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

1)  $-4 < x \leq 6$ ; 2)  $\sqrt{5} - \sqrt{3} < x < \sqrt{5} + \sqrt{3}$ .

6. Какое из чисел больше:

1)  $3\sqrt{3}$  или  $\sqrt{12}$ ; 2)  $5\sqrt{32}$  или  $12\sqrt{8}$ ;

3)  $2\sqrt{18}$  или  $3\sqrt{2}$ ; 4)  $\frac{1}{2}\sqrt{200}$  или  $\sqrt{50}$ ;

5)  $2\sqrt{\frac{8}{9}}$  или  $\frac{1}{3}\sqrt{50}$ ; 6)  $3\sqrt{\frac{8}{49}}$  или  $\frac{1}{7}\sqrt{50}$ ;

7)  $\frac{5}{2}\sqrt{63}$  или  $4,5\sqrt{28}$ ; 8)  $0,5\sqrt{108}$  или  $3\sqrt{3}$ ?

7. Докажите следующие неравенства:

1)  $-|a| \leq a \leq |a|$ ; 2)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;

3)  $|x - y| \geq |x| - |y|$ ; 4)  $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,

причем знак равенства имеет место только при  $a = \pm b$ .

8. Докажите, что:

1) если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , причем равенство имеет

место лишь при  $a = b$ ;

2) если  $a, b, c \geq 0$ , то  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ;

3) если  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ ;

4) если  $a \geq 0$ , то  $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$ .

Указание. Рассмотрите равносильное исходному неравенство  $\sqrt{a} - \sqrt{a+1} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}$ . Перенесите иррациональность из числителя в знаменатель;

5) если  $a + b > -b + c$ ,  $a - b > b + c$ , то  $a > c$ ;

6) если  $p \geq 1$ , то  $5p^2 - 1 \geq 4p$ ;

7) если  $0 < a < b$ ,  $k > 0$ , то  $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$  и  $\frac{b}{a} > \frac{b+k}{a+k}$ ;

8) если  $a, b, c, d > 0$ ,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ;

9) если  $x, y, z$  — любые действительные числа, то  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ;

10) если  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $a, b, c \geq 0$ , то  $a + b + c \leq \sqrt{3}$ .

9. Докажите, что во всей области допустимых значений  $a, b, c$  имеет место неравенство  $\sqrt{a+2b} + \sqrt{a+2c} \leq 2\sqrt{a+b+c}$ .

10. Докажите, что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — положительные числа, то

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M,$$

где  $m$  – наименьшее, а  $M$  – наибольшее из отношений

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}.$$

11. Докажите, что из равенств  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ ,  $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$  следует неравенство:

$$-1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq 1.$$

12. Докажите, что если  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $d > 0$ , то

$$1) \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}; \quad 2) \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

причем равенство имеет место только 1) при  $a = b = c = d$ ;  
2)  $a = b = c$ .

13. Докажите, что  $(1+x)^n > 1+nx$ , если  $1+x > 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

#### § 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Найдите действительные числа  $x$  и  $y$ , если

$$1) 3x - y + (x + y)i = 7 + 5i; \quad 2) (1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i.$$

2. Выполните указанные действия:

$$1) (2 + 3i) + (3 - 4i); \quad 2) (2 + 3i)(4 - 2i);$$

$$3) (2 + 3i)(3 - 2i) + (2 - 3i)(3 + 2i); \quad 4) \frac{5 - 2i}{1 + 2i}; \quad 5) \frac{1 + i}{1 - i} + \frac{1 - i}{1 + i};$$

$$6) \frac{4 + i}{2 - i} + \frac{5 - 3i}{3 + i}; \quad 7) \frac{1}{1 + 4i} + \frac{1}{4 - i}; \quad 8) \frac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \frac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i};$$

$$9) i - i; \quad 10) i - i^5 - 2i^4 + 2; \quad 11) i^{27} + 6i^{16}; \quad 12) i^{4n+3} - 5i^2, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$13) (1 + i)^4; \quad 14) \frac{(1 + i)^3}{1 - i}; \quad 15) (1 + 2i)^4(-7 + 24i); \quad 16) (7 + 24i) \left( \frac{1 - 2i}{1 + 2i} \right)^2.$$

3. Разложите на множители:

$$1) a^2 + b^2; \quad 2) a + b; \quad 3) a^2 + 5; \quad 4) a^2 + 9.$$

3а. Докажите, что если  $z = a + bi$ ,  $\bar{z} = a - ib$ ,  $\operatorname{Re} z = a$ ,  $\operatorname{Im} z = b$ , то

$$1) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z; \quad 2) z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z;$$

$$3) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad 4) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

4. Решите уравнения:

$$1) z^2 = i; \quad 2) z^2 = 3 + 4i; \quad 3) |z| + z = 0;$$

$$4) |z|^2 + z = 0; \quad 5) z^2 + |\bar{z}| = 0; \quad 6) |z| + z^2 = 0.$$

5. Постройте на плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа:

$$1) 3 + 2i; \quad 2) 3; \quad 3) -1 + 2i; \quad 4) -1 - 2i; \quad 5) 3i; \quad 6) -2 - 3i;$$

$$7) -3i; \quad 8) 2 - 4i; \quad 9) -\sqrt{3}; \quad 10) 2i^{71} - 5i^{60}; \quad 11) -4i^{15} - (-i)^{14}.$$

6. Определите модуль комплексного числа:

$$1) 1 + i; \quad 2) 1 - i; \quad 3) 2; \quad 4) -2 + i; \quad 5) -3i; \quad 6) 0;$$

$$7) (1 + i)^4 + 3i; \quad 8) \frac{1 + 2i^7}{1 + 3i}.$$

7. Определите аргумент комплексного числа:

$$1) 3; \quad 2) -2i; \quad 3) 3i; \quad 4) 0; \quad 5) -5; \quad 6) 1 + i; \quad 7) 1 - i;$$

$$8) -1 + i; \quad 9) -1 - i.$$

8. Запишите в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

$$1) 2 + 2i; \quad 2) 2 - 2i; \quad 3) 6i; \quad 4) -5; \quad 5) -\sqrt{3} + i; \quad 6) -2i;$$

$$7) -1 - \sqrt{3}i; \quad 8) 5; \quad 9) 1; \quad 10) -1; \quad 11) 25i; \quad 12) -25i;$$

$$13) -3; \quad 14) \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 15) -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 16) -\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$17) \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 18) \sin 48^\circ + i \cos 48^\circ; \quad 19) \cos 111^\circ - i \sin 111^\circ;$$

$$20) -2i \sin \alpha + 2 \cos \alpha, \quad \alpha \in \left[0; \frac{5}{2}\right]; \quad 21) \sin \alpha - i \cos \alpha, \quad \alpha \in \left[0; \frac{5}{2}\right];$$

$$22) -2(\cos \alpha - i \sin \alpha), \quad \alpha \in \left[0; \frac{5}{2}\right].$$

9. Выполните указанные действия:

$$1) 2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) \cdot 4(\cos 37^\circ - i \sin 37^\circ); \quad 2) [2(\cos 11^\circ + i \sin 11^\circ)]^5;$$

$$3) (-2 + 2i)^4; \quad 4) (\sqrt{3} - i)^{10}; \quad 5) (1 + i)^{20}.$$



10. Применяя формулу Муавра, выразите:

1)  $\cos 3\varphi$ ,  $\cos 4\varphi$  через  $\cos \varphi$ ; 2)  $\sin 3\varphi$  через  $\sin \varphi$ .

11. Вычислите значения корней:

1)  $\sqrt[6]{-1}$ ; 2)  $\sqrt[6]{1}$ ; 3)  $\sqrt{2i}$ ; 4)  $\sqrt[3]{-2+2i}$ .

12. Найдите точки на комплексной плоскости, удовлетворяющие уравнениям:

1)  $|z+3|=|z-i|$ ; 2)  $|z-2|=|z+2i|$ ;

3)  $|z-1+i|=|z+2i|$ ; 4)  $|z+i|=|z+1+i|$ ;

5)  $\left|\frac{z-2}{z+3}\right|=1$ ; 6)  $\left|\frac{z+i}{z-3i}\right|=1$ .

13. Найдите точки плоскости, удовлетворяющие неравенствам:

1)  $1 < |z| < 2$ ; 2)  $1 \leq |z-i| \leq 3$ ; 3)  $|z-i| > |z+3|$ ;

4)  $|z+1-i| \leq |z-1|$ ; 5)  $|2iz-4| \leq 4$ ; 6)  $|iz-1+i| < 1$ .

## § 5. ГРАФИКИ ПРОСТЕЙШИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Постройте графики следующих функциональных зависимостей:

1.  $y=x+4$ . 2.  $y=2x-6$ . 3.  $y=-4x+1$ . 4.  $y=-0,5x-2$ .

5.  $2y-3=4x+5$ . 6.  $3y+x=9-2x$ . 7.  $y+x=3+x$ .

8.  $y-x=y+x-1$ . 9.  $\frac{y}{x-3}=1$ . 10.  $\frac{y+2}{x+1}=2$ . 11.  $\frac{y-2}{y-x}=2$ .

12.  $\frac{y+x}{2x+y+1}=1$ . 13.  $y=|x-2|$ . 14.  $y=-|x+3|$ . 15.  $y=x-|x+4|$ .

16.  $y=|x+2|+x$ . 17.  $y=\frac{|x|}{x}$ . 18.  $y=\frac{x-3}{|x-3|}$ . 19.  $|y|=x-3$ .

20.  $|y+2|=1-x$ . 21.  $y=|x-2|+|x+3|$ . 22.  $y=|x|-|x+1|+|2x-3|$ .

23.  $|y|+|x|=1$ . 24.  $|y|-|x|=1$ . 25.  $|y-x|=4$ . 26.  $|y+x-2|=3$ .

27.  $|y-x|+x=2$ . 28.  $|y+x|-y=-1$ . 29.  $||x+y|-|x-y||=4$ .

30.  $|x+y|+|x-y|=2$ . 31.  $y=|||x|-1|-1|-1|$ .

32.  $||x|+|y|-3|-3|=1$ . 33.  $y=2x^2+1$ . 34.  $y=-x^2+4$ .

35.  $y=-(x+2)^2-1$ . 36.  $y=(x-3)^2+1$ . 37.  $y=-x^2+4x+5$ .

38.  $y=x^2+2x-3$ . 39.  $y=x^2+2x+2$ . 40.  $y=-x^2+4x-5$ .

41.  $y=|x^2-4x|$ . 42.  $y=-|x^2+6x-8|$ . 43.  $|y|=x^2+3x-4$ .

44.  $|y-3|=-x^2+2x$ . 45.  $y=|x^2-3|x|+2|$ . 46.  $|y|=|x^2-3x+2|$ .

47.  $x=y^2-2y$ . 48.  $|x|=3+2y-y^2$ . 49.  $y=\frac{2}{x+2}$ . 50.  $y=-\frac{3}{x-4}$ .

51.  $y-2=\frac{-1}{x+3}$ . 52.  $y+1=\frac{2}{x-2}$ . 53.  $y=\frac{x-4}{x-2}$ . 54.  $y=\frac{x+1}{x-3}$ .

55.  $y=\frac{2x+1}{3x-6}$ . 56.  $y=\frac{x+2}{2x+1}$ . 57.  $y=\left|\frac{3x+1}{x-2}\right|$ . 58.  $y=\left|\frac{x-2}{2-3x}\right|$ .

59.  $y=\frac{x-4}{|x+2|}$ . 60.  $y=\frac{|x-1|}{x-2}$ . 61.  $y=\frac{x-2}{|x-1|+x}$ .

62.  $y=\frac{x+1}{|x+2|-x}$ . 63.  $y=\frac{x^2+1}{x}$ . 64.  $y=\frac{x^3-1}{x}$ .

65.  $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$ . 66.  $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$ . 67.  $y=\frac{4}{x^2+4}$ .

68.  $y=\frac{2}{x^2+2x+3}$ . 69.  $y=\frac{x}{x^2+1}$ . 70.  $y=\frac{x-3}{x^2+4x+5}$ .

## § 6. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Докажите, что при любом  $n \in \mathbb{N}$

1.  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

2.  $1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ .

3.  $\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ .

4.  $\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{1+2+\dots+n}=\frac{2n+1}{3}$ .

$$5. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

$$6. n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ кратно } 9.$$

$$7. 4^n + 15n - 1 \text{ кратно } 9.$$

$$8. n^3 + 3n^2 + 5n \text{ кратно } 3.$$

$$9. 10^n + 18n - 28 \text{ кратно } 27.$$

$$10. \text{ Докажите, что при натуральных } n \geq 3 \\ 2^n > 2n + 1.$$

$$11. \text{ Докажите, что при натуральных } n \geq 5 \\ 2^n > n^2.$$

12. Докажите, что при любом  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$1) n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ делится на } 9;$$

$$2) n^7 - n \text{ делится на } 42.$$

13. Докажите, что при нечетных  $n$ :

$$n^3 - n \text{ делится на } 24.$$

14. Докажите, что при четных неотрицательных  $n$

$$5^{2n+1} + 3^{n+1} \text{ кратно } 8.$$

15. Докажите, что при любом  $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

## § 7. СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ. ТЕОРЕМА БЕЗУ. ТЕОРЕМА ВЬЕТА

1. При каких  $a$  и  $b$  многочлены  $M(x)$  и  $N(x)$  тождественно равны, если

$$1) M(x) = x^3 + 3ax^2 + 48x + 1, \quad 2) M(x) = ax^3 + b^2x^2 + x + 1, \\ N(x) = x^3 + 6x^2 + x + 1; \quad N(x) = x^2 + x - b;$$

$$3) M(x) = x^3 + 2bx^2 + ax + 2, \quad 4) M(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (2x+1)x + 1, \\ N(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 2; \quad N(x) = x(x^3 + 1) + a(x^2 + 1) + bx^2?$$

2. Найдите частное и остаток от деления многочленов:

$$1) (x^2 - 4x + 5) : (x - 4); \quad 2) (x^2 + 4x - 5) : (x - 1);$$

$$3) (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) : (x^2 + x); \quad 4) (x^3 - 1) : (x^2 - 1);$$

$$5) (x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 2x - 2) : (x^2 + 4x + 2); \quad 6) (x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1);$$

$$7) (x^2 - 3x + 2) : (x^3 - 3x^2 + 2x); \quad 8) (x - 4) : (x^2 - 8x + 16).$$

3. Используя теорему Безу, найдите остатки от деления нижеприведенных многочленов на  $x-3$ ,  $x$ ,  $x+1$ ,  $2x+4$ :

$$1) x^2 - 2x - 3; \quad 2) 2x^2 + 4x; \quad 3) x^4 - 7x^2 - 6x + 1;$$

$$4) x^3 - 2x^2 - 3x; \quad 5) x^5 + 32; \quad 6) x^4 - 81.$$

4. При каких значениях  $a$  многочлен  $x^3 + ax^2 - 2ax - 8$  делится на 1)  $x+1$ , 2)  $x-2$ , 3)  $x$ , 4)  $2x+4$ ?

5. При каких действительных значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $3x^3 - ax^2 + bx + 4$  делится на 1)  $x^2 - x - 2$ , 2)  $x^2 - 1$ , 3)  $x^2 + 1$ , 4)  $x^2 + x$ ?

6. Найдите многочлен третьей степени относительно  $x$ , если известно, что он делится на  $x^2 - 1$ , при делении на  $x$  дает в остатке 1, а при делении на  $x - 2$  остаток равен 3.

7. Найдите приведенный многочлен четвертой степени относительно  $x$ , если известно, что он делится на  $x^2 + 1$ , а при делении на  $x^2 + 3x - 4$  дает в остатке  $-35x + 47$ .

8. При делении многочлена на  $x - 1$  в остатке получается 2, а при делении на  $x - 2$  остаток равен 1. Какой остаток от деления этого многочлена на  $(x - 1)(x - 2)$ ?

9. Найдите в нижеприведенных многочленах все рациональные корни. Представьте эти многочлены в виде произведения многочленов более низких степеней:

$$1) x^2 - 5x - 6; \quad 2) -3x^2 + 4x + 7;$$

$$3) x^3 - 3x^2 - x + 3; \quad 4) x^3 + x^2 - 9x - 9;$$

§ 8. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ.  
УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решите уравнения ( $a, b, m$  – действительные числа):

1.  $2(x-3) - x(x-1) = (1-x)(1+x) - 4.$
2.  $(x-3)(x+1) - 3(x-1) = x(x-5).$
3.  $2x(3x-2) - 3\left[1 - (2-x)(2x+3) - \frac{x-3}{2}\right] = 13.$
4.  $3\left\{x - \frac{3x-1}{4} - \left[1 - 2\left(x - \frac{3+x}{5}\right)\right]\right\} = 5x - 2.$
5.  $\frac{2x+1}{3-x} = \frac{4-x}{x+1}.$
6.  $\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}.$
7.  $\frac{x^2}{x+4} = \frac{16}{x+4}.$
8.  $x + |x-1| = 3.$
9.  $|x-3| = \frac{x}{2} - 1.$
10.  $|x-1| + x = 5 - |x|.$
11.  $|x+1| + |x-2| = x + 7.$
12.  $x + 2 = ax.$
13.  $(a+2)x - 2ax = 10.$
14.  $ax + x(1-3a) + a - 1 = 0.$
15.  $\frac{a+2}{x-2} = a - 1.$
16.  $\frac{1}{x} = \frac{a-1}{a+x}.$
17.  $\frac{x+a}{a-x} + \frac{x-a}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2}.$
18.  $\frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}.$
19.  $x^2 - 5x + 6 = 0.$
20.  $x^2 - 4x - 5 = 0.$
21.  $3x^2 + 2x - 5 = 0.$
22.  $1 - 4x - 5x^2 = 0.$
- 22a.  $x^2 + 4x + 5 = 0.$
23.  $x^2 - x + 1 = 0.$
24.  $x^2 - 5 = 0.$
25.  $3x^2 - 4x = 0.$
26.  $x^2 - \frac{5}{3}x - 26 = 0.$
27.  $x^2 - 5,6x + 6,4 = 0.$
28.  $2x^2 - 4x + 1 = 0.$
29.  $x^2 + 6x - 1 = 0.$
30.  $\frac{6}{5x-1} = 3x + 8.$
31.  $5x + 6 = \frac{7}{2x+9}.$

5)  $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2;$  6)  $3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2;$

7)  $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9;$  8)  $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3;$

9)  $x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 4x - 12;$  10)  $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6.$

10. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного уравнения  $2x^2 + 3x + 4 = 0$ . Не находя значений  $x_1$  и  $x_2$ , найдите значения следующих выражений:

1)  $x_1 x_2;$  2)  $x_1 + x_2;$  3)  $(x_1 - 2)(x_2 - 2);$  4)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};$  5)  $x_1^2 + x_2^2;$

6)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1};$  7)  $x_1^3 + x_2^3;$  8)  $(x_1 - x_2)^2;$  9)  $x_1^4 + x_2^4;$  10)  $x_1^5 + x_2^5.$

11. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного трехчлена

$$cx^2 + (2c-1)x + c - 2.$$

При каких  $c$  выполняются следующие соотношения:

1)  $x_1 + x_2 = -3;$  2)  $x_1 x_2 = 2;$  3)  $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = 0?$

12. Корни уравнения  $x^2 + ax + b = 0$  равны  $x_1$  и  $x_2$ . Напишите уравнение, корни которого равнялись бы

1)  $2x_1, 2x_2;$  2)  $\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2};$  3)  $-x_1, -x_2;$

4)  $x_1 + x_2, x_1 x_2;$  5)  $x_1^2, x_2^2.$

13. Дано уравнение  $x^3 - x - 1 = 0$ , корни которого обозначим  $x_1, x_2, x_3$ . Каким будет кубическое уравнение с коэффициентом 1 при  $x^3$ , если корнями его являются числа

1)  $2x_1, 2x_2, 2x_3;$  2)  $x_1 x_2, x_2 x_3, x_1 x_3;$

3)  $x_1^2, x_2^2, x_3^2;$  4)  $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}?$

14. Докажите, что уравнение  $x^2 + px + q = 0$  не может иметь рациональных корней, если  $p$  и  $q$  – целые нечетные числа.

15. Докажите, что уравнение  $x^3 + x = 1985$  обязательно имеет комплексные корни.

32.  $4 - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x+7)}{x+1} - \frac{x+11}{x^2-1}$ . 33.  $\frac{ax^2}{x-1} = (a+1)^2$ .

34.  $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1}$ . 35.  $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$ .

36.  $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ . 37.  $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} + 2 = 0$ .

38.  $1 + \frac{4a}{x+a} = \frac{3x}{2x-a}$ . 39.  $\frac{m}{x-m} - \frac{x}{x+m} = \frac{7}{5}$ .

40.  $\frac{1}{b+x} = \frac{3b}{2x^2} - \frac{1}{x}$ . 41.  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

42.  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ . 43.  $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ .

44.  $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$ . 45.  $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ .

46.  $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0$ . 47.  $x^3 - 1 = 0$ . 48.  $x^3 + 8 = 0$ .

49.  $x^4 + 1 = 0$ . 50.  $x^4 - 1 = 0$ . 51.  $x^5 - 1 = 0$ .

52.  $x^5 + 32 = 0$ . 53.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ . 54.  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ .

55.  $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) = 63$ . 56.  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$ .

57.  $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$ . 58.  $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$ .

59.  $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$ .

60.  $(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^2 + 5x^4 = 0$ . 61.  $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$ .

62.  $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$ . 63.  $x(x-1)(x-2)(x-3) = 15$ .

64.  $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7) = 19$ . 65.  $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$ .

66.  $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$ . 67.  $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$ .

68.  $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0$ .

69.  $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 5$ . 70.  $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$ .

71.  $x^3 + x^{-3} = 6(x + x^{-1})$ . 72.  $\frac{(1+x)^5}{1+x^5} = \frac{81}{11}$ .

73.  $x^4 = \frac{11x-6}{6x-11}$ . 74.  $x^5 = \frac{133x-78}{133-78x}$ .

75.  $\frac{x^2-6x-9}{x} = \frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$ . 76.  $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}$ .

77.  $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$ . 78.  $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12$ .

79.  $(x-a)^3 - (x-b)^3 = b^3 - a^3$ . 80.  $(x^2-16)(x-3)^2 + 9x^2 = 0$ .

## § 9. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите следующие системы:

1.  $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1. \end{cases}$  2.  $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$  3.  $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x+2y=13. \end{cases}$  4.  $\begin{cases} 5x-3y=1, \\ 0,5x+2y=7. \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x-y=0, \\ x+2y=0. \end{cases}$  6.  $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x=-2y. \end{cases}$  7.  $\begin{cases} 2x-2y=1, \\ x=y+2. \end{cases}$  8.  $\begin{cases} \frac{x}{y}=1, \\ 2x-y=0. \end{cases}$

9.  $\begin{cases} 2|x|-y=10, \\ x+2|y|=10. \end{cases}$  10.  $\begin{cases} y+|x|=2, \\ y-|x-1|=1. \end{cases}$  11.  $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x+y+2z=1, \\ 2x+y-z=3. \end{cases}$

12.  $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+2y+z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$  13.  $\begin{cases} x+2y+z+7=0, \\ 2x+y-z-1=0, \\ 3x-y+2z-2=0. \end{cases}$  14.  $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x+y+2z=1, \\ 2x+y-z=6. \end{cases}$

15. При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} 2x+ay=a+2, \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$$

является неопределенной?

16. При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} (a-1)x+(2a-3)y=a+2, \\ (a+1)x+(a+3)y=3a+1 \end{cases}$$

несовместна?

Решите и исследуйте относительно параметров следующие системы:

$$17. \begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = a^2. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} (a-4)x + 6y = 0, \\ ax + (a+4)y = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x + (m-1)y = 3, \\ (m+1)x + 4y = -3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x + (a-1)y = 2a, \\ (a-1)x + 4y = a+5. \end{cases}$$

21. При каких значениях  $a$  и  $b$  система

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение  $(1; 1)$ ?

22. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решите следующие системы:

$$23. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{6}{2x+y-1} - \frac{2}{2x-y+3} = \frac{5}{2}, \\ \frac{4}{2x+y-1} + \frac{4}{2x-y+3} = 3. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \frac{x}{y}(x - y) = 2, \\ \frac{x}{y} + (x - y) = 3. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} xy = 15, \\ x + y + x^2 + y^2 = 42. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23, \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 + xy = -3. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 40. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x^3 - y^3 = 7(x - y), \\ x^3 + y^3 = 3(x + y). \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 4x^3y + 5x^2y^2 + 4xy^3 = 10xy, \\ (x^2 - 1)(xy + 1) = x - 1. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{1}{xy} - xy = \frac{9}{20}. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 4(x^3 + y^3) = x^2y^2, \\ \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x^4 + y^4 = 97, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x^4 + y^4 = 16, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} = \frac{7}{12}, \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} = \frac{8}{15}, \\ \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{9}{20}. \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} \frac{3xy}{x+y} = 2, \\ \frac{4xz}{x+z} = 3, \\ \frac{5yz}{y+z} = 6. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} xy + xz = -4, \\ yz + yx = -1, \\ zx + zy = -9. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{xy}, \\ 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{yz}, \\ 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{xz}. \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} x^2 - yz = 3, \\ y^2 - xz = 5, \\ z^2 - xy = -1. \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} x + y = 3z, \\ x^2 + y^2 = 5z, \\ x^3 + y^3 = 9z. \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

## § 10. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите следующие неравенства и системы неравенств:

1.  $2(x-3)+4 < x-2$ .
2.  $4(x-1) \geq 5+x$ .
3.  $ax+1 > 0$ .
4.  $ax+2 < 0$ .
5.  $ax+b \geq 0$ .
6.  $|x+2| \geq 1$ .
7.  $|x-1| \leq 3$ .
8.  $|ax+b| \leq 1$ .
9.  $(a-1)x > a^2-1$ .
10.  $|2x+1| > |x-1|$ .
11.  $|x+1| > |3x+2|$ .
12.  $\begin{cases} 3(x-1) \leq 2x+4, \\ 4x-3 > 13. \end{cases}$
13.  $\begin{cases} 3x-4 < 2, \\ 12-x > 0. \end{cases}$
14.  $\begin{cases} 2(1-x) < 4-3x, \\ 10-3x < 1. \end{cases}$

15. На школьной олимпиаде было предложено решить шесть задач; за каждую решенную задачу засчитывалось 10 очков, за каждую нерешенную снималось 3 очка. Найдите, сколько задач надо было решить, чтобы оказаться в числе победителей, если победителем считался тот, кто набрал не менее 30 очков.

16. В раствор объемом 8 л, содержащий 60% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько нужно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не больше 40%, но и не меньше 30%?

17. Для получения крахмала берут рис и ячмень, причем ячменя берут в 4 раза больше, чем риса. Сколько килограммов каждого зерна надо взять, чтобы получить от 18 до 27 кг крахмала, если рис содержит 75% крахмала, а ячмень — 60%?

18. Три бригады изготовили за смену не менее 95 деталей и не более 98 деталей. Первая бригада изготовила на 18 деталей больше, чем вторая, а третья  $\frac{5}{11}$  того количества деталей, которое изготовила первая и вторая бригады вместе. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

Решите следующие неравенства:

19.  $x^2-5x+6 > 0$ .
20.  $x^2+3x+2 \geq 0$ .
21.  $x^2-3x+1 \leq 0$ .
22.  $2x^2-5x+2 < 0$ .
23.  $x^2+2x+1 \leq 0$ .
24.  $x^2+4x+4 \geq 0$ .

25.  $x^2+3 > 0$ .
26.  $x^2-2x+3 < 0$ .
27.  $(1-x)(2+x)(x-3) < 0$ .
28.  $(x-\pi)^3(2x+3)(x-4)^5 \leq 0$ .
29.  $\frac{(3x-5)^2(x+2)}{(x-3)(x+4)^3} > 0$ .
30.  $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+4)(5-x)} \geq 0$ .
31.  $\frac{(2x-3)x^2(4-x)^{99}}{(x-6)^5(x^2+4x+6)} \leq 0$ .
32.  $\frac{(x^2-4x+3)^2(x^2+4)}{(4x-x^2)(x+3)} \geq 0$ .
33.  $\frac{x+2}{4-x} > 1$ .
34.  $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$ .
35.  $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$ .
36.  $\frac{3}{x^2-x+1} \geq 1$ .
37.  $\frac{x^2-6}{x^2-3x} > 1$ .
38.  $\frac{x-4}{x^2+3x-4} > 1$ .
39.  $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$ .
40.  $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$ .
41.  $|x^2-2x| < \frac{3}{4}$ .
42.  $|x^2-1|-2x < 0$ .
43.  $x^2+x-10 < 2|x-2|$ .
44.  $|x^2-4| < |x+2|$ .
45.  $|x^2-1| > |x-1|$ .
46.  $\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$ .
47.  $|x^2+x-6|-|x+3| > x+1$ .
48.  $|2x+5|-|3x-4| \leq 2x-4$ .
49.  $\frac{x^2+7x-13}{x^2+1} < 1$ .
50.  $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} > 3$ .
51.  $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}$ .
52.  $(x^2+1)(x^2+x+1)^3(x+2)^5 > 0$ .
53.  $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} < 5$ .
54.  $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} < 5$ .

55. Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам или системам неравенств:

- 1)  $(x-2)(y-3) \geq 0$ ;
- 2)  $(x+y)(x-y) \leq 0$ ;
- 3)  $4y^2-x^2 \geq 0$ ;
- 4)  $(x-y)\left(x+\frac{1}{y}\right) > 0$ ;

$$5) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ xy \geq 6; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y \geq x^2, \\ y + x^2 \leq 4; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 3x - 6y + 6 < 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

56. Найдите, при каких действительных значениях  $a$  следующие неравенства справедливы при всех  $x \in \mathbb{R}$ :

$$1) ax^2 - ax + 3 > 0; \quad 2) x^2 - 2(a-1)x + a + 5 > 0;$$

$$3) (a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 2 > 0; \quad 4) ax^2 + (a-1)x + a - 3 < 0.$$

57. Найдите все значения  $a$ , при которых оба корня квадратного трехчлена  $y = x^2 - 2ax + a^2 - 1$  будут находиться в интервале  $]-2; 4[$ .

58. Найдите все значения  $k$ , при которых действительные корни уравнения:  $kx^2 - (k+1)x + 2 = 0$  будут оба по абсолютной величине меньше 1.

59. Найдите, при каких значениях  $a$  корни квадратного трехчлена  $y = (2-a)x^2 - 3ax + 2a$  действительны и оба больше  $1/2$ ?

60. Найдите все значения  $a$ , при которых действительные различные корни квадратного трехчлена  $y = x^2 + 2x + a$  оба принадлежат интервалу  $]-1; 1[$ .

$$61. \text{ Решите неравенство } 2|x-a| < 2ax - x^2 - 2.$$

62. Найдите все значения  $a$ , при которых следующие неравенства будут справедливы при всех значениях  $x$ :

$$1) \left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3; \quad 2) \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} < 8.$$

63. Найдите все значения  $p$ , при каждом из которых неравенство  $3 - |x-p| > x^2$  имеет хотя бы одно отрицательное решение.

64. Найдите, при каких действительных значениях  $k$  все решения неравенства  $(k-1)x^2 + (k^2 - 2k + 2)x + k - 1 > 0$  положительны и меньше 2.

## § 11. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решите следующие уравнения:

$$1. \sqrt{11-x} = x + 1.$$

$$2. \sqrt{8-x} = x - 2.$$

$$3. 4 + \sqrt{26-x^2} = x.$$

$$4. \sqrt{10-x^2} = x - 2.$$

$$5. \sqrt{6-4x-x^2} = x + 4.$$

$$6. \sqrt{4+2x-x^2} = x.$$

$$7. 2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8. \quad 8. 3\sqrt{3x^2 + 2x - 4} - 2x = 3x^2 - 2.$$

$$9. \sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7.$$

$$10. \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1.$$

$$11. \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4.$$

$$12. \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5.$$

$$13. \sqrt{11-x} - \sqrt{15+x} = 1.$$

$$14. \sqrt{17+x} - \sqrt{19-x} = 3.$$

$$15. \sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}.$$

$$16. x\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x}\sqrt{x^2+15} = 6. \quad 17. \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4.$$

$$18. \frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2. \quad 19. \frac{\sqrt[7]{11+x}}{x-1} + \frac{\sqrt[7]{11+x}}{12} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x-1}.$$

$$20. \frac{\sqrt[9]{3x}}{3x-4} + \frac{\sqrt[9]{3x}}{4} = \sqrt[9]{12x-16}.$$

$$21. \sqrt{x^2-5x+4} - \sqrt{4x-x^2} = \sqrt{-x^2+6x-5} - \sqrt{3x}.$$

$$22. \sqrt{x^2-3x} + \sqrt{-x^2+x+2} = \sqrt{-x^2+3x+4} + 2 + \sqrt{-1-x}.$$

$$23. \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1} = 2. \quad 24. \sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-2x+1} = -3.$$

$$25. \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} = 2.$$

$$26. \sqrt{x+7} - 4\sqrt{x+3} + \sqrt{x+12} + 6\sqrt{x+3} = 5.$$

$$27. \sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{3-x} = 1.$$

$$28. \sqrt[3]{28-x} + \sqrt[3]{7+x} = 5.$$

$$29. \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1.$$

$$30. \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} = \frac{35}{12}.$$

$$31. \sqrt{x+3} = a.$$

$$32. \sqrt{x-a} = a + 1.$$

$$33. \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = a.$$

$$34. \sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} = a.$$

$$35. \sqrt[n]{x^{n+1} + \sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}} + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n+1]{a^{n^2} x^n}} = b, \text{ где } n \in \mathbb{N}, b > a > 0 \text{ и } x > 0.$$

$$36. \sqrt[8]{a-x} + \sqrt[8]{x} = \sqrt[8]{a}.$$

$$37. \sqrt[16]{b+x} - \sqrt[16]{b} = \sqrt[16]{x}.$$

$$38. x^2 - \sqrt{a-x} = a.$$

$$39. x + \sqrt{a+\sqrt{x}} = a.$$

Решите следующие неравенства:

$$40. \sqrt{x+3} < 3-x.$$

$$41. \sqrt{4-x} < x+8.$$

$$42. \sqrt{3x+1} < \frac{1}{2}x+1.$$

$$43. \sqrt{1-3x} < \frac{5-x}{3}.$$

$$44. \sqrt{x+32} > x+2.$$

$$45. \sqrt{10-x} > x-4.$$

$$46. 2x+3 < \sqrt{x^2+5x+6}.$$

$$47. \sqrt{x^2-3x+2} > 2x-5.$$

$$48. \sqrt{2x^2-3x-5} < x-1.$$

$$49. \sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1.$$

$$50. \frac{\sqrt{x+19}}{x-1} - 1 < 0.$$

$$51. \frac{\sqrt{2x-3}}{x-3} < 1.$$

$$52. \sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geq 1.$$

$$53. 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} \geq 1.$$

$$54. \frac{(9-x)\sqrt{9-x} + (4+x)\sqrt{4+x}}{(9-x)\sqrt{4+x} + (4+x)\sqrt{9-x}} < \frac{7}{6}.$$

$$55. (35-x)\sqrt{35-x} + (-9+x)\sqrt{x-9} > \frac{7}{12}(\sqrt{35-x} + \sqrt{x-9})^3.$$

$$56. \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

$$57. (a+1)\sqrt{2-x} < 1.$$

$$58. a\sqrt{x+1} < 1.$$

Решите следующие системы уравнений:

$$59. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{xy-2y} = 2. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{y} - 1 = 0. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} + 1. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{5(x-y)}{x+y}} = \frac{10}{x+y}, \\ x^2 y^2 = 36. \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} x+y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3, \\ 5x-y = 11. \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4, \\ x+y = 20. \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} x-y = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^2y}), \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3. \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 4. \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} \sqrt{b-x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{y}, \\ \sqrt{a-x} + \sqrt{y-x} = \sqrt{y}. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2. \end{cases}$$

## § 12. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1. Пешеход вышел из пункта  $A$  в пункт  $B$  со скоростью 4 км/ч. Если бы он двигался со скоростью на 1 км/ч большей, то пришел бы в пункт  $B$  на 1 ч раньше. Какой путь прошел пешеход?

2. Велосипедист едет из одного города в другой со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то приехал бы в конечный пункт на 4 ч раньше. Какое расстояние преодолел велосипедист?

3. Две точки, расстояние между которыми равно  $s$ , начинают равномерно двигаться навстречу друг другу со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Через какое время точки встретятся, если они начали движение одновременно?

4. Из точки  $A$  начинает двигаться по направлению к точке  $B$  тело со скоростью  $v_1$ . Одновременно с ним из точки  $B$  по прямой ( $AB$ ) начинает равномерно двигаться в том же направлении второе тело со скоростью  $v_2$ . При каком условии первое тело догонит второе? Через какое время это произойдет, если  $|AB| = S$ ?

5. Из пункта  $A$  выезжает автомобиль со скоростью 40 км/ч. Через 1 ч вслед за ним выезжает с постоянной скоростью другой автомобиль, а еще через 1 ч расстояние между ними было равно 30 км. С какой скоростью двигался второй автомобиль?



6. Из пункта С выехал велосипедист. Через два часа из того же пункта выехал второй велосипедист, а еще через 3 ч расстояние между ними уменьшилось в 1,5 раза. Найдите отношение скоростей велосипедистов, если известно, что эти скорости постоянны.

7. За первый день тракторная бригада вспахала 32,5% колхозного поля, а площади, вспаханные во второй и третий день, относились как 0,25:0,2. Определите площадь поля, если во второй день было вспахано на 33,75 га больше, чем в третий.

8. С трех участков собрали 99,75 т картофеля. Количество картофеля, собранного с первого и второго участков, относилось как 7:10, а с третьего участка собрали на 15% больше, чем со второго участка. Сколько картофеля собрали с каждого участка?

9. В сосуд, содержащий 5 л 20%-го водного раствора щелочи, добавили 15 л воды. Каким стало после этого процентное содержание щелочи?

10. Слиток массой 3 кг, содержащий 80% олова и 20% свинца, сплавляли с куском олова массой 7 кг. Каким стало процентное содержание олова в этом сплаве?

11. Кусок сплава меди и цинка массой 2 кг содержит 40% меди. Сколько килограммов сплава этих же металлов, содержащего 90% цинка, надо сплавить с первым куском, чтобы получить третий сплав, содержащий 15% меди;  $p\%$  меди?

12. Сосуд содержит 30 мл 10%-го по объему раствора соляной кислоты. Сколько миллилитров 15%-го по объему раствора нужно долить в сосуд, чтобы получить 12%-й раствор,  $q\%$ -й раствор?

13. Сколько надо долить 10%-го по объему раствора серной кислоты в сосуд емкостью 5 л, содержащий 3 л 5%-го по объему раствора такой же кислоты, чтобы получить  $z\%$ -й раствор серной кислоты?

14. Имеются два куска сплавов меди и серебра: первый – массой 2 кг и содержит 30% меди, второй – массой 3 кг и содержит 40% меди. Сколько килограммов второго сплава надо сплавить со всем первым куском, чтобы получить новый сплав, содержащий  $p\%$  меди?

15. Если у некоторого натурального числа цифру тысяч увеличить на 1, а цифру единиц уменьшить на 2, то получится число в 1,5 раза больше исходного. Найдите исходное число.

16. Шестизначное число начинается цифрой 1. Если эту единицу перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное шестизначное число будет втрое больше исходного. Найдите исходное число.

17. Часы показывают 4 часа. Через какое время минутная стрелка догонит часовую?

18. Часы показывают полночь. Через сколько минут часовая и минутная стрелки снова совпадут?

19. Имеются три сосуда, содержащие воду. Сначала  $\frac{1}{3}$  воды из первого сосуда перелили во второй сосуд, затем четвертую часть воды, оказавшейся во втором сосуде, перелили в третий сосуд и, наконец, 10% воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этого в каждом сосуде оказалось 9 л воды. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

20. По трем сосудам распределено 24 л жидкости. Из первого сосуда переливают в два другие столько, сколько в каждом из них было. Затем из второго переливают в два другие столько, сколько в каждом из них оказалось после первого переливания. Потом из третьего переливают в остальные столько, сколько в каждом оказалось после второго переливания. В результате, во всех сосудах оказалось одинаковое количество жидкости. Сколько жидкости было в каждом сосуде первоначально?

21. Прямоугольная клумба размерами  $18 \times 12$  м окаймлена дорожкой постоянной ширины. Определите ширину дорожки, если ее площадь равна площади клумбы.

22. Имеется лист жести в форме прямоугольника, у которого длина относится к ширине как 2:1. Из этого листа изготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной 2 см и получившиеся края загнуты (каждая боковая грань коробки составляет прямой угол с основанием). Определите размеры листа жести, если объем коробки оказался равным  $96 \text{ см}^3$ .

23. Выйдя со станции с опозданием 1 ч, поезд покрыл перегон в 180 км со скоростью, превышающей скорость по расписанию на 15 км/ч, и пришел к концу перегона вовремя. Какова по расписанию скорость поезда на этом перегоне?

24. Мотоциклист остановился для заправки горючим на 24 мин. Увеличив свою скорость на 10 км/ч, он наверстал потерянное время на перегоне в 80 км. С какой скоростью двигался мотоциклист на этом перегоне?

25. Катер прошел расстояние в 60 км по реке, туда и обратно за 6 ч 15 мин. Определите собственную скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч.

26. Лодка, обладающая собственной скоростью 3 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не

останавливаясь за 6 ч. Расстояние между пунктами 8 км. Определите скорость течения реки.

27. Сначала катер шел  $d$  км по течению реки, а затем — вдвое большее расстояние по озеру, в которое река впадает. Весь рейс продолжается 1 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки  $c$  км/ч.

28. Из пункта  $A$  на берегу озера в пункт  $B$ , расположенный на берегу реки, впадающей в это озеро, вышел катер. Он прибыл к месту назначения через  $T$  ч, пройдя по озеру  $a$  км, а по реке втрое большее расстояние. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки  $v$  км/ч.

29. Бак наполняется двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба заполняет его на 5 ч скорее, чем одна вторая. Во сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

30. Бассейн, содержащий  $V$  л воды, имеет два крана: через первый он наполняется, а через второй вода вытекает на  $t$  мин скорее, чем первый кран наполняет бассейн. Однажды, когда бассейн до половины был наполнен водой, открыли оба крана одновременно. Через  $T$  мин после этого вся вода вытекла. За сколько минут вода наполнит бассейн через первый кран и вытечет через второй, когда каждый из них действует отдельно?

31. Куплен товар двух сортов: первого на 45 руб., второго на 21 руб. Второго сорта куплено на 2 кг меньше первого и стоит он за килограмм на 2 руб. дешевле. Сколько товара каждого сорта куплено?

32. Несколько человек должны были заплатить поровну всего 90 руб. Если бы их было на 6 человек менее, то каждому пришлось бы выплатить на 4 руб. больше. Сколько их было?

33. Ученик при перемножении двух чисел, из которых одно на 38 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру тысяч на единицу. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 86, а в остатке 56. Какие натуральные числа он перемножал?

34. При сложении правильной несократимой дроби с дробью, полученной из данной перестановкой числителя и знаменателя, получили  $2\frac{9}{70}$ . Найдите правильную дробь.

35. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 л чистого спирта. Вместимость бака 64 л. Сколько спирта вылили в первый и во второй раз?

36. 50 000 руб. принесли в течение одного года некоторый доход. Какой процент составил доход, если известно, что эти 50 000 руб. вместе с доходом за первый год в течение следующего года дали 2612,5 руб. дохода, причем во второй год число процентов дохода было на 0,5% больше числа процентов дохода в первый год?

37. Две прямолинейные дороги пересекаются в пункте  $O$ . Из пункта  $A$  на одной из дорог, удаленного от  $O$  на расстояние 7 км, начал двигаться пешеход в направлении к  $O$  с постоянной скоростью 4 км/ч. Час спустя после этого из пункта  $B$  на другой дороге по направлению к  $O$  начал двигаться велосипедист с постоянным ускорением  $4 \text{ км/ч}^2$  (начальная скорость велосипедиста равна нулю). Через какое время после начала своего движения пешеход будет на втрое меньшем расстоянии от  $O$ , чем велосипедист?  $|OB| = 10 \text{ км}$ .

38. Пункты  $M$  и  $N$ , расстояние между которыми равно 21 км, расположены на прямолинейной дороге. Из пункта  $M$  по направлению к пункту  $N$  начал двигаться велосипедист с начальной скоростью 10 км/ч и постоянным ускорением  $1 \text{ км/ч}^2$ . Одновременно с ним из пункта  $N$  в том же направлении начал движение автомобиль с постоянным ускорением  $3 \text{ км/ч}^2$ . Через какое время после начала движения расстояние между автомобилем и велосипедистом будет равно 1 км? Начальная скорость автомобиля равна нулю.

39. За несколько порций мороженого первого сорта уплатили 57 коп., а второго сорта, цена которого на 10 коп. меньше цены первого — 63 коп. Сколько порций мороженого каждого сорта было куплено, если известно, что мороженого второго сорта было куплено на  $d$  порций больше?

40. Первая бригада рабочих посадила 95 деревьев, вторая бригада, в которой было на  $d$  человек больше, посадила 102 дерева. Сколько рабочих было в первой бригаде, если каждый рабочий этой бригады посадил на 2 дерева больше, чем каждый рабочий второй бригады?

41. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо будки стрелочника — за 15 с. Найдите длину поезда и его скорость.

42. Поезд проходит мимо платформы длиной  $l_1$  м за  $t_1$  с, а мост длиной  $l_2$  м — за  $t_2$  с. Найдите скорость и длину поезда. За какое время этот поезд пройдет перегон длиной  $l_1 + l_2$  м? ( $l_1 \neq l_2$ ).

43. Поезд проходит расстояние 94,5 км между двумя пунктами за  $1\frac{7}{8}$  ч. Часть этого пути он идет под уклон, а часть — горизонтально. Скорость поезда под уклон 56 км/ч, по горизонтальному пути 42 км/ч. Сколько километров идет поезд под уклон и сколько километров горизонтально?

44. Дорога из пункта  $A$  в пункт  $B$  длиной 14 км идет сначала в гору, а затем — горизонтально. Турист, выйдя из  $A$ , пришел в  $B$  через 6 ч, двигаясь на подъеме со скоростью 1 км/ч, а по горизонтальному пути со скоростью 5 км/ч. Какова длина подъема и длина горизонтального участка? Сколько времени понадобится туристу на обратный путь, если на спуске он будет двигаться со скоростью 2 км/ч, а по горизонтальному участку — с прежней скоростью?

45. На 6 руб. 20 коп. куплено 80 почтовых марок. Часть из них куплена по 10 коп. за марку, остальные по 0,04 руб за марку. Сколько тех и других марок куплено в отдельности?

46. При устройстве водопровода на протяжении 1,652 км уложили 280 труб длиной 6,5 м и 5,5 м. Найдите количество уложенных труб каждого размера.

47. За 9 м полотна и 8,5 м сатина уплачено 28,44 руб. Сколько уплачено за ткань каждого вида, если 1 м полотна на 25% дороже 1 м сатина?

48. За 400 проданных билетов кинотеатр выручил 228,6 руб. Часть билетов была продана по 45 коп. за билет, а другая часть — по цене на 60% дороже. Сколько тех и других билетов было продано?

49. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложили во второй  $a\%$  муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках муки будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

50. Сосуд, наполняемый последовательно двумя жидкостями, удельные веса которых равны  $d_1$  и  $d_2$  ( $d_1 > d_2$ ), весит  $p_1$  и  $p_2$ , включая сюда и вес самого сосуда. Найдите вес сосуда и его объем.

51. Некоторый сплав состоит из двух металлов, массы которых относятся друг к другу как 1:2, а в другом сплаве тех же металлов отношение их масс 2:3. Сколько частей (по массе) каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

52. Один сплав содержит два металла, массы которых относятся как 2:3, а в другом сплаве массы этих же металлов

относятся как 3:7. Какие массы первого и второго сплавов надо сплавить вместе, чтобы получить третий сплав массой 1,5 кг, в котором эти металлы (по массе) находились бы в отношении 1:2?

53. Дорога от  $C$  до  $D$  сначала поднимается в гору на протяжении 3 км, потом идет по ровному месту на протяжении 5 км и после этого опускается под гору до самого пункта  $D$  на протяжении 6 км. Посыльный, отправившись из  $C$  в  $D$  и пройдя полпути, обнаружил, что забыл взять один пакет. Он тотчас повернул обратно и по прошествии 3 ч 36 мин после своего выхода из  $C$  вернулся в  $C$ . Затем, выйдя из него вторично, он прошел весь путь до  $D$  за 3 ч 27 мин и обратный путь в  $C$  за 3 ч 51 мин. С какой скоростью шел посыльный в гору, по ровному месту и под гору, если считать эти скорости постоянными?

54. Дорога от  $A$  до  $B$  длиной 11,5 км проходит через пункты  $C$  и  $D$ . Два пешехода одновременно выходят из конечных пунктов навстречу друг другу. До первого промежуточного пункта (до  $C$  и  $D$  соответственно) они идут со скоростью 3 км/ч, на участке между пунктами  $C$  и  $D$  они идут со скоростью 4 км/ч и последние участки ( $DB$  и  $CA$  соответственно) проходят со скоростью 5 км/ч. Определите длины участков  $AC$ ,  $CD$ ,  $DB$  и место встречи пешеходов, если известно, что первый пешеход пришел в  $B$  через 2 ч 54 мин, а второй — в  $A$  на 12 мин позже.

55. Производительность станка  $A$  в  $m$  раз меньше суммарной производительности станков  $B$  и  $C$ , а производительность  $B$  — в  $n$  раз меньше суммарной производительности станков  $A$  и  $C$ . Во сколько раз производительность станка  $C$  меньше суммарной производительности станков  $A$  и  $B$ ?

56. За сколько дней каждый из трех рабочих отдельно может выполнить некоторую работу, если первый и второй выполняют ее в  $c$  дней, второй и третий в  $a$  дней, а третий и первый в  $b$  дней?

57. Вместимость трех бочек с водой составляет 1440 л. Две из этих бочек наполнены, третья пустая. Чтобы наполнить пустую бочку понадобится все содержимое первой бочки и 0,2 содержимого второй или же все содержимое второй бочки и 0,3 (3) содержимого первой. Определите емкость каждой бочки.

58. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий, в результате чего производительность шахты увеличилась в 1,5 раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от

производительности первого, если известно, что за 4 месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за весь год?

59. В резервуаре, наполненном водой, открыли 4 крана. Через 2 ч, когда вылилась  $1/4$  имевшейся в нем воды, первый кран был закрыт. Через 4 ч после этого, когда вылилась еще одна четвертая часть всей воды, был закрыт второй кран. Через 6 ч после этого, когда было вылиты  $3/4$  всей воды, был закрыт третий кран. После этого через  $10'$ ч из резервуара вылилась вся вода. Во сколько часов выльется из резервуара вся вода, если все время будет работать только один первый кран, один третий?

60. Вода может втекать в бак через 4 трубы. Если открыты трубы 1, 2, 3, то бак наполняется за  $t_1$  с, при открытии труб 2, 3, 4 — за  $t_2$  с, при открытии труб 3, 4, 1 — за  $t_3$  с, а при открытии труб 4, 2, 1 —  $t_4$  с. Определите время наполнения бака при открытии только одной первой трубы.

61. Пароход из Горького в Астрахань идет  $m$  суток, а обратно —  $n$  суток. За какое время пароход прошел бы такое же расстояние при отсутствии течения?

62. Лодка проходит путь от  $A$  до  $B$  вниз по течению реки за 3 ч, а обратно — за 4 ч. Сколько будет плыть плот от  $A$  до  $B$ ? Скорости лодки относительно воды и течения реки постоянны. Плот движется со скоростью, равной скорости течения реки.

63. Из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода с постоянными скоростями. Когда пешеход, вышедший из  $A$ , прошел половину пути, второму пешеходу осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, то первому осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу, когда первый закончит путь?

64. Два спортсмена выбегают одновременно из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $A$ , бегут с постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от  $A$ . Пробежав всю дорожку  $AB$  до конца, каждый из них поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 м от  $B$ . Найдите длину дорожки  $AB$ . На каком расстоянии от  $A$  произойдет их третья встреча, если, достигнув после второй встречи конечных пунктов, они будут продолжать свой бег?

65. Из пунктов  $C$  и  $D$  одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Когда велосипедист, выехавший из  $C$ , преодолел  $1/4$  пути между  $C$  и  $D$ , второй велосипедист находился от него на расстоянии 6 км. Определите отношение

скоростей велосипедистов, если известно, что их скорости постоянны и что, когда велосипедист, выехавший из  $D$ , преодолел  $1/3$  пути, первый находился от него на расстоянии 8 км.

66. Из пункта  $K$  в пункт  $M$  выехала машина. Одновременно с ней из пункта  $M$  навстречу машине выехал автобус. Когда машина проехала  $0,4$  пути от  $K$  до  $M$ , автобус находился от нее на расстоянии 4 км. Когда же автобус проехал половину пути, машина находилась от него на расстоянии 10 км. Найдите отношение времени, которое затрачивает машина на прохождение пути от  $K$  до  $M$ , ко времени, которое требуется автобусу для прохождения того же пути. Скорости машины и автобуса постоянны.

67. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов  $A$  и  $B$  и встретились через  $T$  ч. Во сколько времени прошел расстояние между  $A$  и  $B$  каждый из них, если первый, вышедший из  $A$ , пришел в пункт  $B$  на  $t$  ч позже, чем второй пришел в  $A$ ?

68. Первому рабочему для выполнения некоторой работы требуется на 3 ч больше времени, чем второму. За какое время может выполнить эту работу каждый из них, если вместе они ее могут выполнить за 2 ч?

69. По окружности длиной  $s$  м равномерно в одном направлении движутся две точки, которые сходятся через каждые  $n$  с. Найдите скорости точек, зная, что одна из них проходит всю окружность на  $m$  с быстрее другой.

70. Одновременно из пунктов  $A$  и  $B$  навстречу друг другу начали движение плот (со скоростью течения реки) и лодка. Через время  $t$  ч они встретились и продолжали движение без остановок. Лодка приплыла в  $A$  и, повернув обратно, догнала плот в пункте  $B$ . Предполагая собственную скорость лодки постоянной, определите, закончат ли плот и лодка свое движение за  $T$  ч?

71. Разность цифр двузначного числа равна 5, а произведение этих цифр равно 14. Найдите это число.

72. Произведение двузначного числа на сумму его цифр равно 90. Если умножить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на сумму его цифр, то получится 306. Найдите это число.

73. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3; если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найдите это число.

74. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

75. По сторонам прямого угла к его вершине с постоянными скоростями движутся два шара (центры шаров находятся на сторонах угла) с радиусами 2 и 3 м. В некоторый момент времени расстояние от центра меньшего шара до вершины угла было 6 м, а от центра большего шара — 16 м. Через 1 с после этого момента расстояние между их центрами стало 13 м, а еще через 2 с последовал удар шаров. Найдите скорости шаров.

76. От пристани  $A$  одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, а затем повернул обратно и вернулся в  $A$  через 14 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от  $A$ .

77. На участке реки от  $A$  до  $B$  течение так слабо, что им можно пренебречь; на участке от  $B$  до  $C$  течение реки достаточно быстрое и скорость его постоянна. Лодка проходит расстояние от  $A$  до  $C$  вниз по течению за 6 ч, а от  $C$  до  $A$  — за 7 ч. Если бы на участке от  $A$  до  $C$  течение было бы таким же, как от  $B$  до  $C$ , то весь путь от  $A$  до  $C$  занял бы 5,5 ч. Сколько времени потребовалось бы в этом случае, чтобы подняться вверх по течению от  $C$  до  $A$ ?

78. Из пункта  $A$  в  $B$  против течения отправляется катер. Одновременно из  $B$  в  $A$  отправляется лодка и, пройдя  $3/8$  расстояния от  $B$  до  $A$ , встречается с катером. В пункте  $B$  катер поворачивает назад и прибывает в  $A$  одновременно с лодкой. Если бы скорость лодки относительно воды была в 2 раза больше, то в  $A$  она прибыла бы на 1 ч 10 мин раньше катера. Через какое время после отправления катер возвратился в  $A$ ?

79. Плоты шли из пункта  $A$  до устья реки вниз по течению. У устья реки их взял на буксир пароход и через 11,5 суток после выхода плотов из  $A$  доставил их по озеру в  $B$ . Сколько времени пароход вел плоты от устья до  $B$ , если известно, что пароход тратит на рейс (без буксировки) от  $A$  до  $B$  40 ч, а от  $B$  до  $A$  — 48 ч, а скорость во время буксировки уменьшается вдвое?

80. Из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно выезжают две машины и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первой машины удвоить,

а скорость второй оставить без изменения, то встреча произойдет на 56 мин раньше, если же скорость второй удвоить, а скорость первой оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определите время встречи в том случае, когда скорости обеих машин увеличены вдвое.

81. С двух полей было собрано 330 т пшеницы. Если бы с каждого гектара первого поля было собрано столько пшеницы, сколько ее собрали с каждого гектара второго поля, то с двух полей было бы собрано 405 т, а если бы с каждого гектара второго поля было собрано столько, сколько с каждого гектара первого поля, то урожай составил бы 270 т. Сколько зерна было собрано с каждого поля в отдельности?

82. Двое рабочих были наняты на один и тот же срок. Первый из них проработал на несколько дней меньше срока и получил  $m$  руб. Второй проработал на столько же дней больше срока и получил  $n$  руб. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они зарабатывали бы поровну. Какую часть от договорного срока работал первый рабочий?

83. Число 207 разложите на такие две целые положительные части, чтобы одна часть была кратной 7, а другая при делении на 17 давала бы в остатке 9.

84. Некоторое натуральное число кратно 17, а другое — кратно 23. Найдите эти числа, если их сумма равна 481.

85. Студенты трех групп совершили два похода. В первый поход пошли  $2/3$  всех студентов первой группы,  $4/5$  всех студентов второй группы и  $5/6$  третьей. Всего в первом походе участвовал 61 студент. Во второй поход пошли  $2/5$  студентов второй группы и половина третьей. Во всех трех группах 79 человек. Сколько студентов участвовало во втором походе? Сколько студентов было в каждой группе, если в первой группе было наибольшее возможное число студентов?

86. Школьник истратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, книг и авторучки. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 6 раз дешевле, а книги — в 3 раза дешевле, то покупка стоила бы 7 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 2 раза дороже, а книги — в 1,25 раза дороже, то школьник уплатил бы 20 руб. 75 коп. Сколько стоит покупка? На сколько рублей портфель дороже авторучки?

87. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 ч, первый,

третий и пятый — за 5 ч, первый, третий и четвертый — за 6 ч, второй, четвертый, пятый — за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все пять человек, работая вместе?

88. Бассейн наполняется четырьмя трубами за 4 ч. Первая, вторая и четвертая наполняют бассейн за 6 ч, вторая, третья и четвертая — за 5 ч. За какое время наполняют бассейн первая и третья трубы, действуя совместно?

89. При умножении двух натуральных чисел ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков в произведении на 4. Проверив полученный результат делением на один из сомножителей, он получил в частном 39, а в остатке 22. Найдите сомножители.

90. Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 45.

91. Найдите два натуральных числа, если известно, что сумма их равна 667, а частное от деления их наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель равно 120.

92. Сумма двух натуральных чисел равна 85, а их наибольший общий делитель равен 102. Найдите эти числа.

93. Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы — 56 коп. Книг купили на 6 штук больше альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

94. Длины двух сторон треугольника равны 2 и 13. Найдите периметр треугольника, если известно, что он имеет целочисленное наименьшее значение.

95. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем "троек" было больше, чем "пятерок" и меньше, чем "четверок". Кроме того, число "четверок" делилось на 10, а число "пятерок" было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа?

96. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше второй, а вторая и третья — в 3 раза больше первой. Какая бригада победила в этом соревновании?

97. Катер спускается вниз по течению реки на расстояние  $a$  и тотчас возвращается обратно. Скорость течения реки  $v$ . Каким условиям должна удовлетворять собственная скорость катера, чтобы вся поездка заняла времени не менее  $t_1$  и не более  $t_2$  ( $0 < t_1 < t_2$ )?

98. В каких пределах изменяется скорость точки, если известно, что при увеличении скорости на 3 м/с эта точка, двигаясь равномерно, проходит расстояние в 630 м скорее, причем не менее 1 с и не более 4 мин 40 с?

99. Несколько комбайнов одной марки должны были убрать урожай пшеницы с поля площадью более 90 га и менее 100 га. Перед началом жатвы к этой бригаде комбайнов добавили еще два таких же комбайна, в результате чего во время жатвы каждый комбайн снял урожай с участка на 4 га меньше, чем предполагалось первоначально. Сколько гектаров должен был убрать каждый комбайн по первоначальному плану?

100. Бригада каменщиков должна была в полном составе выложить каменную стену, но в действительности на работу вышло на четыре человека меньше, поэтому каждому работавшему каменщику пришлось укладывать на  $9 \text{ м}^3$  кладки больше, чем предполагалось. Сколько кубических метров кладки пришлось укладывать каждому работавшему каменщику, если кладка всей стены не менее  $405 \text{ м}^3$  и не более  $450 \text{ м}^3$ ?

101. Пункты  $A$  и  $B$  расположены на одной реке так, что плот, плывущий из  $A$  в  $B$  со скоростью течения реки, проходит путь от  $A$  до  $B$  за 24 ч. Весь путь от  $A$  до  $B$  и обратно катер проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость катера увеличилась на 40%, то тот же путь занял бы у катера не более 7 ч. Найдите время, за которое катер проходит путь из  $A$  в  $B$  в случае, когда его собственная скорость не увеличена.

102. В 9 ч утра из пункта  $A$  выезжает велосипедист, который едет до  $B$ . Через 2 ч после выезда велосипедиста из  $A$  в  $B$  выезжает автомобиль, который догоняет велосипедиста не позже 12 ч дня. Продолжая движение, автомобиль прибывает в  $B$ , мгновенно поворачивает и едет из  $B$  в  $A$ . На этом пути он встречает велосипедиста и потом прибывает в  $A$  в 17 ч того же дня (дня выезда велосипедиста). Найдите время прибытия велосипедиста в  $B$ , если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобиля прошло не более 3 ч.

103. Четыре пункта  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  соединены прямолинейными дорогами. К отрезкам дорог  $AB$  и  $BC$  примыкают квадратные поля со сторонами  $\frac{1}{2}|AB|$  и  $\frac{1}{2}|BC|$  соответственно, а к отрезку дороги  $CD$  — квадратное поле со стороной, равной  $|CD|$ . К дороге, идущей из  $D$  в  $A$ , примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной  $|DA|$ , и шириной 4 км. Площадь леса на

36 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите площадь леса.

104. Два катера, имеющие одинаковые скорости в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно. В какой реке на это движение потребуется больше времени: в реке с быстрым или медленным течением?

105. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным направлениям. В 9.00 расстояние между ними было 20 миль, в 9.35 — 15 миль и в 9.55 — 13 миль. В какой момент времени расстояние между пароходами было минимальным и каково это расстояние?

106. Пункты  $A$  и  $B$  расположены на прямолинейной магистрали на расстоянии 9 км друг от друга. Из пункта  $A$  выходит автомашина, двигающаяся равномерно со скоростью 40 км/ч. Одновременно из  $B$  в том же направлении с постоянным ускорением  $32 \text{ км/ч}^2$  выезжает мотоцикл. Найдите наибольшее расстояние между автомашиной и мотоциклом в течение первых двух часов движения.

107. В четырехзначном числе сумма цифр тысяч, сотен и десятков равна 14, а сумма цифр единиц, десятков и сотен равна 15, причем цифра десятков на 4 больше цифры единиц. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма квадратов цифр принимает наименьшее значение.

108. В четырехзначном числе сумма цифр тысяч и десятков равна 4, сумма цифр сотен и единиц равна 15, а цифра единиц больше цифры тысяч на 7. Из всех чисел, удовлетворяющих указанным условиям, найдите такое, у которого сумма произведения цифры тысяч на цифру единиц и произведения цифры сотен на цифру десятков принимает наименьшее значение?

109. Города  $A$  и  $B$  стоят на реке, расстояние между ними 25 км, а скорость течения реки 2 км/ч. Из  $A$  в  $B$  вверх по течению отправляется лодка, собственная скорость которой равна  $v$  км/ч. Одновременно из  $B$  в  $A$  отплывает катер, собственная скорость которого 32 км/ч. После того как лодка и катер встречаются, лодка поворачивает назад и возвращается в  $A$ . При какой скорости  $v$  лодки время ее движения будет наибольшим? При какой скорости  $v$  лодки время ее движения будет наименьшим? Найдите это время.

110. Для подачи воды в бак имеются три крана. Производительность первого крана  $p$  л/с, второго —  $(p+8)$  л/с, третьего — 4 л/с. Сначала через первый кран в бак поступило 32 л

воды, после чего в действие вступил второй кран, и оба крана работали до тех пор, пока через второй кран в бак не поступило такое же количество воды, какое поступило через первый кран. После этого эти краны были отключены, и воду в бак подавал один третий кран, причем через него в бак поступило воды столько, сколько ее подали вместе два первых крана. При каком значении  $p$  на наполнение бака водой таким образом понадобится наименьшее время?

111. В сосуде емкостью 7 л содержится 3 л 70%-й по объему кислоты. Другой сосуд содержит 10 л такой же  $p$ %-й кислоты. Сколько литров кислоты из второго сосуда надо долить в первый, чтобы получить кислоту максимальной концентрации?

112. Сплав меди и олова массой 8 кг содержит  $p$ % меди. Какой кусок сплава меди с оловом, содержащим 40% олова, надо сплавить с первым, чтобы получить новый сплав с минимальным процентным содержанием меди? Масса второго куска 2 кг.

113. Тело начинает движение в момент  $t = 0$ . Скорость тела изменяется по закону  $v(t) = (t^2 - 3t + 2)$  м/с. Какой путь прошло тело за первые 2 с движения?

114. Тело начинает движение в момент  $t = 0$  и движется со скоростью  $v(t) = t^2 - 6t + 8$ . Какой путь оно прошло между второй и четвертой секундами своего движения?

### § 13. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Напишите 3 первых, 20-й и 50-й члены последовательностей, если:

1) каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие число  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ;

2) каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие  $(-1)^n$ ;

3) каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие число  $\sin \frac{\pi}{2} n$ .

2. Последовательность  $(x_n)$  задана следующим образом:

1)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_n = 2x_{n-1} + 5x_{n-2}$  ( $n = 3, 4, \dots$ ). Найдите  $x_4$  и  $x_5$ ;

2)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$  ( $n = 3, 4, \dots$ ). Найдите  $x_6$ .

3. Докажите, что последовательности  $(x_n)$

1)  $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots;$

2)  $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots$

ограничены снизу.

4. Докажите, что последовательности  $(x_n)$

1)  $-1, -8, -27, \dots, -n^3, \dots;$

2)  $-1, -4, -7, \dots, -3n+2, \dots$

ограничены сверху.

5. Какие из приведенных ниже последовательностей являются ограниченными?

1)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$

2)  $-1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{5}, \dots, \frac{(-1)^n}{2n-1}, \dots;$

3)  $-4, -4, -4, \dots, -4, \dots;$

4)  $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n, \dots;$

5)  $0, 1, 2, 0, 1, 3, 0, 1, 4, \dots, 0, 1, n, \dots;$

6)  $\cos 2^\circ, \cos 4^\circ, \cos 6^\circ, \dots, \cos 2n^\circ, \dots;$

7)  $1, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}, \dots, n\sqrt{n}, \dots;$

8)  $10^{10^{10}}, 10^{10^{10}-1}, 10^{10^{10}-2}, \dots, 10^{10^{10}-n+1}, \dots$

6. Последовательность  $(x_n)$  такова, что  $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n - 1, n \in N$ . Найдите формулу общего члена этой последовательности и покажите, что при любом  $m < 0$  найдется такое число  $n_1 \in N$ , что  $x_{n_1} < m$ .

7. Сформулируйте определение последовательности, неограниченной снизу.

8. У последовательности  $(x_n)$   $x_1 = 1$ , а  $x_{n+1} = x_n + 5, n \in N$ . Напишите формулу общего члена этой последовательности и покажите, что для любого  $M > 0$  найдется такое  $n_2 \in N$ , что  $x_{n_2} > M$ . Сформулируйте определение последовательности, неограниченной сверху.

9. Все члены последовательности  $(x_n)$  удовлетворяют неравенству  $|x_n| \leq L$  ( $L > 0$ ). Докажите, что существуют такие действитель-

ные числа  $m$  и  $M$ , что при любом  $n \in N, m \leq x_n \leq M$ . Сформулируйте и докажите теорему, обратную данной.

10. Последовательность  $(x_n)$  такова, что  $x_n = (-1)^n n, n \in N$ . Покажите, что для любых  $m < 0$  и  $M > 0$  найдутся такие натуральные числа  $n_1$  и  $n_2$ , что  $x_{n_1} < m$  и  $x_{n_2} > M$ .

11. Дайте определение неограниченной последовательности, не употребляя частицы "не".

12. Найдите целую часть следующих чисел:

1) 2,15; 2) 3,14; 3) -2,6; 4) -5,08; 5)  $\lg 1023$ ; 6)  $\lg 521$ ;

7)  $\log_2 7$ ; 8)  $\ln 8$ ; 9)  $\sqrt{51}$ ; 10)  $\sqrt{10}$ ; 11)  $\sqrt[3]{9}$ ; 12)  $\sqrt[4]{171}$ .

13. Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых выполняются неравенства:

1)  $-0,1 < \frac{1}{n+1} < 0,1$ ; 2)  $\left| \frac{1}{n+1} \right| < 0,01$ ; 3)  $-\frac{1}{7} < \frac{2n}{n+2} - 2 < \frac{1}{7}$ ;

4)  $\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \frac{1}{15}$ ; 5)  $\left| \frac{1}{1-n} \right| \geq 0,01$ ; 6)  $\left| \frac{1}{2^n} \right| \geq 0,0625$ .

14. Верно ли утверждение: при всяком натуральном  $n > 10$  справедливы неравенства:

1)  $\left| \frac{1}{n} \right| < 0,1$ ; 2)  $\left| \frac{n^2}{n^2-1} - 1 \right| < 0,01$ ;

3)  $\left| \frac{1}{3^n} \right| < \frac{1}{800\,000}$ ; 4)  $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right| < 0,001$  ?

15. При каких натуральных  $n$  выполняются неравенства:

1)  $\frac{(-1)^n}{n} > 0,15$ ; 2)  $\frac{(-1)^n}{n} < -0,15$  ?

16. Изобразите члены приведенных ниже последовательностей  $(x_n)$  на числовой оси:

1)  $0, -1, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{3}, \dots, 0, -\frac{1}{n}, \dots;$

2)  $0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 1, \frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{4}, \dots, 0, 1, \frac{1}{2^{n-2}}, \dots,$

$(n = 3k, k \in N)$ ;

3)  $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, \frac{1-n}{n}, \dots;$  4)  $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{2n}{2n-1}, \dots;$



$$5) 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{2+(-1)^n}{n}, \dots;$$

$$6) 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1+(-1)^n}{n}, \dots$$

Выясните, около какой точки происходит сгущение точек, изображающих члены каждой из последовательностей.

17. Найдите предел  $a$  и номер  $n$ , начиная с которого для указанных ниже последовательностей  $(x_n)$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$

$$1) x_n = \frac{n}{n+2}; \quad 2) x_n = \frac{2n-1}{n+1}; \quad 3) x_n = \frac{1}{n^2}; \quad 4) x_n = \frac{3}{2^n}; \quad 5) x_n = \frac{2}{3^n}.$$

Рассмотрите случаи  $\varepsilon_1 = 0,1$ ;  $\varepsilon_2 = 0,01$ ;  $\varepsilon_3 = 0,001$ .

18. Пользуясь определением предела, докажите, что

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n} = 0; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} = 0;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7^n} = 0.$$

19. Докажите, что последовательности  $(x_n)$

$$1) x_n = (-1)^n; \quad 2) x_n = (-1)^n - 1; \quad 3) x_n = -n; \quad 4) x_n = n^2;$$

5)  $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots, 0, 1, 2, \dots$  не имеют предела.

20. Последовательность  $(x_n)$  сходится к числу  $a$ . Докажите, что

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|. \text{ Сходится ли последовательность } (x_n)?$$

ность  $(x_n)$ ?

21. Дана последовательность  $(x_n)$ :

$$1) p, 1, p, 1, p, 1, \dots, p, 1, \dots;$$

$$2) p^2, \frac{1}{2}, p^2, \frac{2}{3}, p^2, \frac{3}{4}, \dots, p^2, \frac{n}{n+1}, \dots$$

При каких значениях  $p$  каждая из этих последовательностей сходится ( $p = \text{const}$ )?

22. Известно, что последовательности  $(c_n)$  и  $(d_n)$  сходятся, причем для любого  $n \in \mathbb{N}$   $c_n > d_n$ . Верно ли утверждение, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n > \lim_{n \rightarrow \infty} d_n?$$

23. Все члены сходящейся последовательности  $(x_n)$  неотрицательны. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ .

24. Для последовательности  $(x_n)$ :

$$1) x_n = \frac{n}{n-1}; \quad 2) x_n = \frac{3n+5}{n-4}; \quad 3) x_n = \frac{1}{n^3};$$

$$4) x_n = \frac{5}{6^n}; \quad 5) x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Найдите такие действительные числа  $m$  и  $M$ , чтобы для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполнялись неравенства  $m \leq x_n \leq M$ .

25. Последовательности  $(x_n)$  и  $(z_n)$  таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = d.$$

Все члены последовательности  $y_n$ , начиная с некоторого  $n$ , удовлетворяют неравенству  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . Найдите:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}.$$

26. Сходящаяся последовательность  $(x_n)$  такова, что

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \text{ и } x_n = 2 + \alpha_n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3 \text{ и } x_n = -3 + \alpha_n.$$

Докажите, что последовательность  $(\alpha_n)$  является бесконечно малой, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .

27. Дана последовательность  $(x_n)$ :

1)  $x_n = 3 + \alpha_n$ ; 2)  $x_n = -\pi + \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — бесконечно малая последовательность. Докажите, что последовательность  $(x_n)$  сходится, и найдите ее предел.

28. Последовательности  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $(z_n), \dots, (t_n)$  сходятся. Докажите,

что 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n + z_n + \dots + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n + \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ ;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n \dots t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

29. Найдите пределы последовательностей  $(x_n)$ :

$$1) x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{2^n}; \quad 2) x_n = 31 + \frac{10^{10}}{n^3} + \frac{500\,000}{(1,5)^n};$$

$$3) x_n = \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n^5}\right)^3; \quad 4) x_n = \left(12 + \frac{1}{5^n}\right)^2 \left(0,1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right).$$

30. Даны сходящиеся последовательности  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  и  $(z_n)$ . Докажите сходимость последовательностей:

$$1) (-y_n); \quad 2) (x_n - y_n); \quad 3) (x_n - y_n - z_n); \quad 4) (x_n + z_n)y_n; \quad 5) \frac{x_n + y_n}{z_n}$$

$(z_n \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0).$

31. Найдите пределы последовательностей  $(x_n)$ :

$$1) x_n = \left(1 - \frac{2}{n^3 + 1}\right) \left(2 + \frac{5}{n^7}\right)^3 \left(-1 + \frac{1}{6^n} - \frac{4}{n}\right)^{100};$$

$$2) x_n = \left(-2 + \frac{5}{l^n}\right) \left(3 - \frac{1}{n^8 + 1}\right) + 90; \quad 3) x_n = \frac{1 + \frac{3}{n}}{5 + e^{-n}}; \quad 4) x_n = \frac{(5 - 2^{-n})^2}{-10 + \frac{1}{n}}$$

32. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  при любом  $a \in \mathbb{R}$ .

33. Последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$  не имеют пределов. Что можно сказать о сходимости последовательностей  $(x_n + y_n)$ ,  $(x_n - y_n)$ ,  $(x_n y_n)$ ? Приведите соответствующие примеры.

34. Последовательность  $(x_n)$  сходится, а последовательность  $(y_n)$  расходится. Докажите, что последовательность  $(x_n + y_n)$  расходится.

35. Известно, что последовательности  $(x_n + y_n)$  и  $(x_n - y_n)$  сходятся. Будут ли сходитьсь последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$ ?

36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$  следует ли отсюда, что или  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , или  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ?

37. Обязательно ли сходится последовательность  $(x_n)$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = a$ ?

38. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $a \neq 0$ ,  $x_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Что можно сказать о пределе последовательности  $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ ?

39. Известно, что последовательности  $(x_n + y_n)$ ,  $(x_n y_n)$ ,  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  сходятся. Будут ли сходитьсь последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$ ?

Найдите пределы:

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2 + 2n + 300}$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n + 1}{3n^3 - n^2 + 3}$$

$$42. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$$

$$43. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (n+1) + (n+2) + \dots + 3n}{n^2}$$

$$44. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{3n^2 - 2n}$$

$$45. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (2n+2) + \dots + 4n}{5n^2 + n + 1}$$

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!}{(n+1)! - n \cdot n!}$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 2 \cdot 3^n}{5^n + 2^n}$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} - 2^{n+5} + 3}{3^n + 2^{-n} + 10}$$

54. Последовательность  $(\alpha_n)$  — бесконечно малая последовательность. Последовательность  $x_n = 1 + \alpha_n$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = 1$ .

55. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $a > 0$ ,  $x_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Найдите пределы:

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - n} + 1}{n + 20}$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1} + n}{n + 15}$$

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 10})$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 - 2n + 5})$$

60.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+3} + \sqrt{n+1}}{n + \sqrt{n}}$       61.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^4+n^2+1} + \sqrt[3]{n^2+n-1}}{n + \sqrt[3]{n}}$

62. Докажите, что последовательность  $(x_n)$ : 1)  $x_n = \frac{n}{2n-1}$ ;

2)  $x_n = \frac{1-3n}{3n+1}$ ; 3)  $x_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ ; 4)  $x_n = \frac{n+2}{2^n}$ ; 5)  $x_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$   
является монотонно убывающей.

63. Докажите, что последовательность  $(x_n)$ : 1)  $x_n = \frac{2n-1}{n}$ ;

2)  $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ ; 3)  $x_n = (n+1)! - n \cdot n!$ ; 4)  $x_n = \frac{3^n}{n+3}$ ; 5)  $x_n = \frac{(n+2)!}{3^n}$   
является монотонно возрастающей.

64. Докажите, что приведенные ниже последовательности  $(x_n)$  не являются монотонными: 1)  $x_n = n + (-2)^n$ ; 2)  $x_n = n^2 - 6n$ ;

3)  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ; 4)  $x_n = n(-1)^n$ ; 5)  $x_n = 12n - n^2$ ; 6)  $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ .

65. Какие из указанных последовательностей  $(x_n)$  являются монотонными: 1)  $x_n = \frac{4n-1}{5n+2}$ ; 2)  $x_n = (-1)^n \frac{2n+8}{4n-3}$ ; 3)  $x_n = \frac{2n}{n^2+1}$ ;

4)  $x_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ ; 5)  $x_n = \frac{\cos \pi n}{n}$ ; 6)  $x_n = \frac{\sin \pi n}{n^2}$ ? Что можно сказать об их ограниченности?

66. Докажите, что последовательности  $(x_n)$ : 1)  $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ ; 2)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ; 3)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ; 4)  $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{15}{48}, \dots, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}, \dots$ ; 5)  $\frac{2}{\lg 2}, \frac{3}{\lg 6}, \frac{4}{\lg 24}, \dots, \frac{n+7}{\lg(n+1)!}, \dots$  сходятся.

67. Докажите, что последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$ , определяемые следующими формулами:  $x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ , ( $a > 0, b > 0$ ), сходятся и имеют общий предел.

1. Даны последовательности  $\{a_n\}$ ,  $n \in N$ : 1)  $a_n = n+1$ ; 2)  $a_n = 1$ ; 3)  $a_n = (-1)^n$ ; 4)  $a_n = n^2$ . Какие из этих последовательностей являются арифметическими прогрессиями?

2. Всякая ли арифметическая прогрессия 1) монотонна, 2) неограниченна?

3. В арифметической прогрессии  $a_1 = 2, d = 3$ . Найдите  $a_8$ .

4. В арифметической прогрессии  $a_1 = -2, a_{12} = 0$ . Найдите разность  $d$ .

5. В арифметической прогрессии  $a_1 = 1$ . При каком условии число  $\pi$  может быть членом этой прогрессии?

6. Докажите, что если в арифметической прогрессии  $a_1 + a_4 = 2a_2$ , то  $a_4 + a_9 = 2a_6$ .

7. Число членов арифметической прогрессии равно 10.  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$ , а  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 12,5$ . Найдите все члены прогрессии.

8. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать арифметическую прогрессию?

9. Найдите сумму:  $100^2 - 99^2 + 98^2 - \dots + 2^2 - 1$ .

10. Если все члены арифметической прогрессии умножить на одно и то же число, будет ли новая последовательность арифметической прогрессией?

11. В арифметической прогрессии даны ее члены  $a_{m+n} = A_1, a_{m-n} = B$ . Найдите  $a_m$  и  $a_n$ .

12. Числа  $a^2, b^2, c^2$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$  также образуют арифметическую прогрессию.

13. Докажите, что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  образуют арифметическую прогрессию, все члены которой отличны от нуля, то

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

14. Вычислите сумму  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ .

15. Решите уравнение  $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$ .

16. Решите уравнение  $(x + 1) + (x + 4) + \dots + (x + 28) = 155$ .

17. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма ее  $n$  членов равна  $2n^2 - 3n$ .

18. Найдите сумму первых 30 нечетных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.

19. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 6 дают в остатке 5.

20. Докажите, что если в арифметической прогрессии  $S_m = S_n$ , то  $S_{m+n} = 0$ .

21. Докажите, что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  образуют арифметическую прогрессию, причем  $a_n > 0$  при всех  $k = 1, 2, \dots, n$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

22. Определите стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, причем периметр треугольника равен 15.

23. Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в четыре раза больше квадрата числа членов.

24. Найдите арифметическую прогрессию, в которой пятый член равен 18, а сумма  $n$  членов равна  $1/14$  суммы  $2n$  членов.

25. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии имеет место равенство:  $S_m : S_n = m^2 : n^2$ . Докажите, что

$$a_m : a_n = (2m - 1) : (2n - 1).$$

26. Найдите отношение корней биквадратного уравнения, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию.

27. Какие из перечисленных ниже последовательностей  $\{b_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  являются геометрическими прогрессиями: 1)  $b_n = -1$ ;

2)  $b_n = \frac{n}{n+1}$ ; 3)  $b_n = 0$ ; 4)  $b_n = 2^{-n}$ ; 5)  $b_n = 3^n - 2^n$ ; 6)  $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n^2}$ ;

7)  $b_n = 2^{n-1} \cdot 3^n$ ?

28. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной и той же геометрической прогрессии?

29. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

30. Найдите сумму  $n$  членов геометрической прогрессии, если  $b_1 = A$ , а  $b_n = B$ .

31. В геометрической прогрессии  $b_1 + b_2 + b_3 = 31$ ,  $b_1 + b_3 = 26$ . Найдите прогрессию.

32. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найдите второй член этой прогрессии.

33. Произведение трех членов геометрической прогрессии равно 64, а сумма кубов этих членов равна 584. Найдите прогрессию.

34. Докажите, что если  $A, B, C$  —  $n$ -й,  $p$ -й,  $k$ -й члены одной и той же геометрической прогрессии, то  $A^{p-k} \cdot B^{k-n} \cdot C^{n-p} = 1$ .

35. Докажите, что в геометрической прогрессии любые четыре члена,  $b_m, b_n, b_k, b_l$ , для которых  $m+n = k+l$ , связаны соотношением  $b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_l$ .

36. В геометрической прогрессии  $2n$  членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна  $S_1$ , а на четных —  $S_2$ . Найдите знаменатель прогрессии.

37. Определите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен отношению суммы квадратов ее членов к сумме членов, а сумма кубов ее членов, поделенная на первый член, так относится к сумме квадратов ее членов, как 6:7.

38. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов ее членов равна  $108/13$ . Найдите сумму пяти первых членов.

39. Найдите геометрическую прогрессию, если известно, что сумма первых ее 4-х членов равна 15, а сумма их квадратов равна 85.

40. Найдите сумму  $n$  чисел вида 1, 11, 111, 1111,...

41. Число членов геометрической прогрессии четное, сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

42. Докажите, что в геометрической прогрессии сумма квадратов нечетного числа членов делится без остатка на сумму первых степеней тех же членов.

43. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, обладающую тем свойством, что ее сумма в два раза больше суммы  $k$  первых членов.

44. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 = 3x + a = 0$  и  $x_3, x_4$  — корни уравнения  $x^2 - 12x + b = 0$ . Известно, что числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (в указанном порядке) составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Найдите  $a$  и  $b$ .

45. Пусть числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  составляют геометрическую прогрессию. Зная суммы  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  и  $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ , найдите произведение  $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ .

46. Докажите равенство  $(\underbrace{66\dots6}_n)^2 + \underbrace{88\dots8}_n = \underbrace{44\dots4}_{2n}$ .

47. В геометрической прогрессии  $1, x, x^2, \dots, x^{2n}$  произведение членов с нечетными номерами равно 64, а произведение членов с четными номерами равно 32. Найдите  $n$  и  $x$ .

48. Найдите условия, при которых квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию.

49. Найдите предел выражения  $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\dots}}}}}}$ .

50. При каком значении  $x$  прогрессия  $\frac{a+x}{a-x}, \frac{a-x}{a+x}, \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3, \dots$  есть бесконечно убывающая? Найдите предел суммы членов прогрессии.

51. Сторона квадрата равна  $a$ . Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным, и т.д. Найдите предел суммы периметров и предел суммы площадей этих квадратов.

52. Сторона равностороннего треугольника равна  $a$ . На высоте его построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового равностороннего треугольника построен еще равносторонний треугольник и т.д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

53. В шар радиусом  $R$  вписан куб. В этот куб вписан новый шар. В шар опять вписан куб и т.д. Найдите сумму площадей поверхностей и сумму объемов всех этих кубов и сумму площадей поверхностей и сумму объемов всех шаров.

54. Найдите сумму  $n$  дробей, если их числители образуют арифметическую прогрессию с первым членом  $a$  и разностью  $d$ , а знаменатели — геометрическую прогрессию с первым членом  $b$  и знаменателем  $q$ .

55. Решите уравнение  $x^3 + x^2 + 2x + a = 0$ , зная, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

56. Докажите, что если  $S_n, S_{2n}$  и  $S_{3n}$  — суммы  $n, 2n$  и  $3n$  первых членов геометрической прогрессии, то  $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$ .

## § 15. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Найдите область определения функций:

1.  $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-x}$ .      2.  $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{3x-4}$ .

3.  $y = \frac{1}{x^2-1}$ .      4.  $y = \frac{1}{x^2+1}$ .      5.  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \lg(x-1)$ .

6.  $y = \sqrt{(x^2-4x+3)\lg^2(x+1)}$ .      7.  $y = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$ .

8.  $y = \sqrt{1 - (\sin x + \cos x)^2}$ .      9.  $y = \arccos \frac{1-2x}{x+1}$ .

10.  $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{2}\right)}$ .      11.  $y = \arcsin \frac{2}{2+\sin x}$ .      12.  $y = \log_x 2$ .

13.  $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$ .      14.  $y = \lg[1 - \lg(x^2+5x+16)]$ .

Тожественны ли функции?

15.  $f(x) = \frac{2x}{x^2}$  и  $\varphi(x) = \frac{2}{x}$ .      16.  $f(x) = \frac{x^2}{2x}$  и  $\varphi(x) = \frac{x}{2}$ .

17.  $f(x) = \lg x^2$  и  $\varphi(x) = 2 \lg x$ .

Какие из данных функций четны, какие нечетны, какие не являются ни четными, ни нечетными?

18.  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .      19.  $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ .      20.  $y = 3^x + 3^{-x}$ .

21.  $y = \cos x - \sin x$ .      22.  $y = x \sin x$ .

$$23. y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0). \quad 24. y = \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

25. Убедитесь в том, что  $f(x) + f(-x)$  – четная функция, а  $f(x) - f(-x)$  – нечетная функция.

Какие из нижеприведенных функций будут периодическими? Укажите период:

$$26. y = \cos 2x. \quad 27. y = \sin 3x. \quad 28. y = \sin^2 x. \\ 29. y = \sin x^2. \quad 30. y = \sin 2x - 2 \cos 3x. \quad 31. y = \cos 2x^3. \\ 32. y = \sin 2x \cos 4x. \quad 33. y = \cos 3x \cos 5x.$$

Сформулируйте на языке "ε - δ" и на языке последовательностей следующие утверждения:

$$34. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \quad 35. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b. \quad 36. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b. \quad 37. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \\ 38. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty. \quad 39. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \quad 40. f(x) = x^2.$$

Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ . Найдите δ по заданному ε = 0,001.

41.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{5}$ . Найдите δ по заданному ε = 0,1.

42.  $f(x) = \sin x$ . Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$ . Найдите δ по заданному ε = 0,01.

43.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Найдите δ по заданному ε = 0,1.

Найдите пределы функций:

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - x + 1}. \quad 45. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 3}. \quad 46. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}. \\ 47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}. \quad 48. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x}. \quad 49. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{1 - x - 2x^2}. \\ 50. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{2x^2 + x + 1}. \quad 51. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). \quad 52. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right).$$

$$53. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}. \quad 54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{2x}. \quad 55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{2x}. \quad 57. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4}. \quad 58. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}).$$

$$59. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x + 2} - 2x). \quad 60. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}. \quad 61. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}. \quad 63. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}. \quad 64. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad 66. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}. \quad 67. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$$

$$68. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}. \quad 69. \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x).$$

$$70. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 71. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \operatorname{arctg} 3x} - \sqrt[3]{1 - \arcsin 3x}}{\sqrt[3]{1 - \arcsin 2x} - \sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 2x}}.$$

Исследуйте на непрерывность функции:

73.  $y = 2x - 1$  в точке  $x_0 = 1$ .

74.  $y = x^2$  в точке  $x_0 = 3$ .

75.  $y = x^2 - x + 2$  в точке  $x_0 = 0$ .

76.  $y = \cos x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

77.  $y = \cos x - \sin x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

78. Пусть  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2 - ax^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

При каком выборе параметра  $a$  функция  $f(x)$  будет непрерывной?

$$79. \text{ Пусть } f(x) = \begin{cases} -3 \sin x, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  функция  $f(x)$  будет непрерывной?

80. Функция  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$  не определена при  $x = 1$ . Доопределите ее таким значением  $f(1)$ , чтобы  $f(x)$  стала непрерывной.

81. Исследуйте на непрерывность функцию  $y = \frac{|x|}{x}$  при  $x \neq 0$  и  $y = 0$  при  $x = 0$ .

82. Можно ли доопределить в точке  $x = 0$  функцию  $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$  так, чтобы она стала непрерывной всюду?

Укажите точки разрыва функций и опишите поведение функции в окрестности этих точек:

$$83. y = \frac{x-2}{x-1} \quad 84. y = \frac{1-x}{1-x^3} \quad 85. y = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2} \quad 86. y = x \cos \frac{1}{x}$$

$$87. y = \frac{x}{\sin x} \quad 88. y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad 89. y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

## § 16. ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Вычислите производные следующих функций:

$$1. y = 2x^2 - 3x + 1. \quad 2. y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 1.$$

$$3. y = (x+1)(1-2x). \quad 4. y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + x - 1).$$

$$5. y = (2x-1)^8. \quad 6. y = (3x+1)^4(2-4x)^5. \quad 7. y = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right).$$

$$8. y = \frac{x+1}{2x-2}. \quad 9. y = \frac{x^2}{1-x^3}. \quad 10. y = \frac{1-x^3}{\sqrt{2}}. \quad 11. y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}. \quad 13. y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad 14. y = \sin x - \cos x.$$

$$15. y = \sin 3x + 2 \cos 2x. \quad 16. y = \sin^3 x. \quad 17. y = \cos^2(\sqrt{x}).$$

$$18. y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}. \quad 19. y = 2 \sin(3x+1). \quad 20. y = \sin \sqrt{1+x^2}.$$

$$21. y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x. \quad 22. y = \cos \left( \sin^2 \left( \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \right) \right). \quad 23. y = x \arcsin x.$$

$$24. y = (\arccos x)^2. \quad 25. y = \operatorname{arctg} x^2. \quad 26. y = \frac{1}{2} \sqrt[5]{\arcsin \sqrt{x^2-x}}.$$

$$27. y = \ln^2 x. \quad 28. y = \ln(\ln \sqrt{x}). \quad 29. y = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

$$30. y = \log_3(x^3-2x). \quad 31. y = \ln(x-\sqrt{x^2+1}). \quad 32. y = \sqrt{1+e^x}.$$

$$33. y = e^{\sqrt{x+1}}. \quad 34. y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln x - 1}. \quad 35. y = x^x. \quad 36. y = x^{x^x}.$$

Найдите критические точки следующих функций:

$$37. f(x) = 8(\cos 2 - \cos x) - \sin x - \frac{1}{\sin x}.$$

$$38. f(x) = \cos[\pi + \sqrt{x}] + \cos\left[\frac{\pi}{2} - \sqrt{x}\right].$$

$$39. f(x) = 2 \sin \sqrt{x} - \sqrt{12}(1 + \cos \sqrt{x}).$$

$$40. f(x) = \frac{\sqrt{5-a}}{\sqrt{a-1}} - \operatorname{ctg} x (\cos \alpha + 1) - \frac{1}{3} \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg}^3 x.$$

$$41. f(x) = 6x^3 - 18x^2 \cos 2a - 18x \sin \frac{a}{2} \sin \frac{7}{2} a + \sqrt{1-2^4 \cdot a} + \sqrt{16-a^2}.$$

$$42. f(x) = (3-a)x + 8 \sin x - 6 \cos x + 6 - \sqrt{a^2+5a-14}.$$

Найдите промежутки монотонности и экстремумы функций:

43.  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ . 44.  $y = 3x - x^3$ . 45.  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ . 46.  $y = \frac{x}{\ln x}$ .

47.  $y = \frac{\ln x + 1}{x}$ . 48.  $y = \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x$ . 49.  $y = x^2 e^{-x}$ .

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на заданных промежутках:

50.  $y = |x^2 - 3x + 2|$ ,  $x \in [-5; 5]$ . 51.  $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ ,  $x \in [-3; 2]$ .

52.  $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ ,  $x \in [-4; -1]$ . 53.  $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ,  $x \in [-2; 2]$ .

54.  $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$ ,  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . 55.  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ .

56.  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ ,  $x \in [0; 3]$ .

Исследуйте заданные функции и постройте их графики:

57.  $y = x^3 - 3x + 1$ . 58.  $y = 2x^4 - 4x^2 - 7$ . 59.  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .

60.  $y = \frac{x}{1+x^2}$ . 61.  $y = x - \frac{2}{x^2}$ . 62.  $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ . 63.  $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$ .

64.  $y = \cos x + \sin^2 x$ . 65.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ . 66.  $y = x e^{-x}$ .

67.  $y = \frac{1}{e^x - 1}$ . 68.  $y = \cos x - \ln \cos x$ . 69.  $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$ .

70. Проведите касательную к гиперболе  $y = \frac{x+9}{x+5}$  так, чтобы она прошла через начало координат.

71. На линии  $y = \frac{2}{1+x^2}$  найдите такую точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

72. В каких точках линии  $y = x^3 + x - 2$  касательная к ней параллельна прямой  $y = 4x - 1$ ?

73. При каком условии кубическая парабола  $y = x^3 + px + q$  касается оси  $Ox$ ?

74. Объем правильной треугольной призмы равен  $v$ . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

75. Найдите соотношение между радиусом  $R$  и высотой  $H$  цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

76. Найдите высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом  $R$ .

77. Через данную точку  $p(1; 4)$  проведите прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей.

## § 17. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Найдите первообразные для функций:

1.  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$ . 2.  $f(x) = (1 - 2x^2)^2$ . 3.  $f(x) = \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$ .

4.  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ . 5.  $f(x) = 1 - \cos x - \cos 2x$ . 6.  $f(x) = \sin^2 x$ .

7.  $f(x) = \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}$ . 8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}$ . 9.  $f(x) = \cos^4 x$ .

10.  $f(x) = \sin 2x \cos 4x$ . 11.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ . 12.  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

13.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . 14.  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$ .

Вычислите интегралы:

15.  $\int_0^{\pi/4} \sin^2 3x dx$ . 16.  $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$ . 17.  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 2x}$ .

18.  $\int_0^2 (1+2x)^4 dx$ . 19.  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$ . 20.  $\int_0^1 (2^x - 5^x) dx$ .

21.  $\int_0^{1/2} \frac{x dx}{(x-1)^3}$ . 22.  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$ .



Найдите площадь фигур, ограниченных линиями:

23.  $y = \frac{4}{x^2}$ ;  $y = -4x$ ;  $x = -2y$ . 24.  $y = -\frac{16}{x}$ ;  $y = -x^3$ ;  $y = 1$ .

25.  $y = -\frac{1}{x^3}$ ;  $y = 27$ ;  $16y = -x$ . 26.  $y = \frac{8}{x^2}$ ;  $2y = x^2$ ;  $y = -8x$ .

27.  $y = -x^3$ ;  $y = x$ ;  $y = 8$ . 28.  $y = -\frac{1}{x}$ ;  $y = x^2$ ;  $8y = x^2$ .

29.  $y = -x^2 - 8x - 15$ ,  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ .

30. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = e^{2x} + 7$  и кривой  $y = 5 \int e^x dx$ , проходящей через точку  $M(0; 6)$ .

31. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой  $y = -x - 4$  и параболой  $y = ax^2 + 6x - 10$ , если касательная к параболе в точке  $x = 2$  составляет с осью  $OX$  угол, тангенс которого равен 2.

32. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = 25^x + 9$  и кривой  $y = b5^x + 4$ , у которой касательная в точке  $x = 1$  имеет угол наклона к оси  $OX$ , равный  $\operatorname{arctg}(30 \ln 5)$ .

33. Найдите  $a$ , если площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 9x - x^3$ ,  $x = 1$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ , равна 7.

34. Найдите  $m$ , при котором площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = m$ ,  $x = \frac{\pi}{42}$ ,  $y = \cos 7x$ ,  $y = 0$ , равна  $1/7$ .

35. Найдите  $b$ , если площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $y = 16x$ ,  $x = b$ , равна 15,5.

36. Найдите числа  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  такие, что функция вида  $f(x) = Pe^{-2x} + Qe^{-x} + Rx$  удовлетворяет условиям:

$$f(0) = 1, \quad f'(-\ln 3) = 83, \quad \int_0^{-\ln 2} [f(x) - Rx] dx = 2.$$

37. Найдите  $A$ ,  $B$ ,  $C$  такие, что функция вида  $f(x) = -Ax^2 + Bx + C$  удовлетворяет условиям:

$$f'(-1) = -20, \quad f(3) - 3f''(3) = 14, \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{8}{3}.$$

38. Найдите наибольшее значение функции

$$F(x) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^x (5 \sin t - 7 \cos t) dt.$$

39. Найдите наименьшее значение функции

$$F(x) = \int_{\frac{4}{3}\pi}^x (5 \cos t + 2 \sin t) dt \quad \text{на} \quad \left[ \frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi \right].$$

## § 18. ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Найдите области определения следующих функций:

1.  $y = \log_2(1 - 2x)$ .

2.  $y = \log_{|x|} 2$ .

3.  $y = \lg \frac{x}{x-1}$ .

4.  $y = \log_2(1 - x^2)$ .

5.  $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$ .

6.  $y = \log_{1/5}(6x - 5 - x^2)$ .

7.  $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos 2^x$ .

8.  $y = \sqrt{1 - \lg x}$ .

9.  $y = \arcsin \log_2 x$ .

10.  $y = \sqrt{\log_3 2^{x^2 - 4x + 3}}$ .

11.  $y = \sqrt{2^{3x} - 2^{-x}}$ .

12.  $y = \log_{\log_2} [\log_2 (\log_2 x)]$ .

Постройте графики следующих функций:

13.  $y = 4^{-x}$ . 14.  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ . 15.  $y = 2^{2-x}$ . 16.  $y = 3^{4x}$ .

17.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-2|}$ . 18.  $y = 10^{|1-x|}$ . 19.  $y = \log_{1/4} 4x$ .

20.  $y = |\log_2 |x||$ . 21.  $y = \ln \frac{1}{(x-1)^2}$ . 22.  $y = \log_{1/3} ||x+2| - 1|$ .

23.  $y = 3^{\log_3(3-x)}$ . 24.  $y = 3^{\log_{3/2} x}$ . 25.  $y = \log_{1/2}(x^2 - 4)$ .

26.  $y = \log_3(x^2 - 3x)$ . 27.  $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$ . 28.  $y = \log_x 10$ .

$$29. y = \log_2 \frac{x-1}{x} \quad 30. y = 4^{\frac{1}{\log_3 x}} \quad 31. y = 4^{\sin x} \quad 32. y = 10^{|\cos x|}$$

$$33. y = \log_2 \sin x \quad 34. y = \log_{|\sin x|} \frac{1}{2} \quad 35. y = 4^{|\lg x + 1|} \quad 36. y = 2 + 2^{3 \cos \frac{x}{3}}$$

$$37. y = 3^{x^2 - 3x} \quad 38. y = \log_{1/2} \left( x - \frac{1}{2} \right) + \log_2 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$$

$$39. y = 2 - 2^{1 + \sin(x+2)} \quad 40. y = 4^{\sqrt{\cos x - 1}} \quad 41. y = 3^{\frac{1}{\sin x}} \quad 42. y = 4^{\frac{1-x}{x}}$$

$$43. y = \log_{x^2 - 3x} 3 \quad 44. y = \log_{|x^2 - 3x + 2|} 2 \quad 45. y = \log_2^2 |\cos x|$$

$$46. y = \sqrt[1984]{\log_{1984} \cos^{1984} x}$$

Упростите выражения:

$$47. 5^{\log_{1/5} 2} \quad 48. 0,001^{\lg 2} \quad 49. \left( \frac{1}{3} \right)^{\log_2 3} \quad 50. \log_{1/3} 81 \sqrt{3}$$

$$51. \log_3 4 \cdot \log_4 3 \quad 52. 3^{-\log_3 \sqrt{5}^6} \quad 53. \log_3 2 \cdot \log_4 3 \dots \log_{10} 9$$

$$54. \lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$$

$$55. \text{Дано: } \log_{14} 7 = \alpha; \log_{14} 5 = \beta. \text{ Найдите } \log_{35} 28.$$

56. Пусть:  $\log_{12} 18 = a$ ,  $\log_{24} 54 = b$ . Докажите, что справедливо равенство  $ab + 5(a - b) = 1$ .

Решите следующие уравнения:

$$57. \left( \frac{1}{3} \right)^{-x} = 3^2 \quad 58. 3^{x-1} = 2 \quad 59. \left( \frac{1}{2} \right)^{x^2-1} = \sqrt{2} \quad 60. 10^{x^2-4x} = 10^{-5}$$

$$61. 2^{2^x} = 5 \quad 62. 3^{3^x} = 17 \quad 63. 10^{x^2} = 2 \cdot 100^x \quad 64. \log_{1/2} x = 2$$

$$65. \log_{1/2} (1-x) = -2 \quad 66. \log_3 |x| = 2 \quad 67. \lg (\log_2 x)^2 = 2$$

$$68. \log_a (ax) \log_x (ax) = \log_a^2 \frac{1}{a} \quad 69. \lg (x+7) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 1$$

$$70. \log_2 x = 3 - \log_2 7 \quad 71. \log_{x+1} (x^2 + x - 6)^2 = 4$$

$$72. \log_4 (6 + \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|) = \frac{1}{2} + \log_2 |\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|| \quad 73. 2^{x+1} + 2^x = 3$$

$$74. 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6 \quad 75. \sqrt{3^x} = 27 - 2^{2/3} \quad 76. 2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$$

$$77. \log_2 4 + \log_2 8 = 25 \quad 78. \log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$$

$$79. 2 \log_x 7 + \log_{x^2} 16 = 2 \quad 80. \log_a x + |a + \log_a x| \log_{\sqrt{x}} a = a \log_x a$$

$$81. \frac{1}{2} \lg (2x-1) + \lg \sqrt{x-9} = 1 \quad 82. \log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \log_4 x^2 + 9 = 0$$

$$83. \lg \sqrt{x+21} - \lg 2 + \frac{1}{2} \lg (x-21) = 1 \quad 84. \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4$$

$$85. \log_{5x} \frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1 \quad 86. \sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$$

$$87. 3^{\log_3 x} \cdot x^{\log_3 |x|} = 9 \quad 88. 3x^{\log_3 2} + 2^{\log_3 x} = 64$$

$$89. \log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3-x)} \quad 90. x^x = x$$

$$91. 4 \log_{25}^2 x = (\log_5 x) [2 \log_5 (\sqrt{x+5} - 1)]$$

$$92. 2 \log_2 \log_2 x + \log_{1/2} \log_2 (2\sqrt{2}x) = 1 \quad 93. 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x = 4^x$$

$$94. 4\sqrt{3^{x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2\sqrt{3^{x^2-2x}} \quad 95. 2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$$

$$96. \frac{\log_3 x - 1}{\log_3 x/3} - 2 \log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3 \quad 97. x + \lg (1 + 2^x) = x \lg 5 + \lg 6$$

$$98. \log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$99. \frac{1}{\log_6 (\sqrt{3+x})} + \frac{2 \log_{0,25} (4-x)}{\log_2 (\sqrt{3+x})} = 1 \quad 100. 2^x + 4^{\frac{x+1}{2}} = 8 \cdot 3^{\frac{x}{3}}$$

$$101. 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6 \quad 102. (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$$

$$103. 3^{\lg x} - 2 \cdot 3^{\lg x + 1} = 1 \quad 104. x^2 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}-1} + x^2 \cdot 2^{x-2}$$

$$105. 9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0 \quad 106. \log_2 (6x^2 + 25x) = 1 + \log_2 (ax + 4a - 2)$$

$$107. 144^x - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0 \quad 108. \frac{\log_a^2 \sqrt{x} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{1/a} 2x = 0$$

$$109. 2 |\lg (ax)| \cdot \log_x 10 = (4 \lg a - 3) \log_x 10 - \frac{1}{2} \lg x$$

$$110. \log_{\sqrt{x}} a |\log_a \frac{x}{2}| = \log_a^2 2 \cdot \log_{\sqrt{x}} a^2 - \log_a \sqrt{x}$$

$$111. (\log_{\frac{1}{2}x} 2)(\log_{\frac{1}{2}x} a) + 1 = 0.$$

$$112. (\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}})^x + (\sqrt{a - \sqrt{a^2 - 1}})^x = 2a; \quad (x > 0, a > 1).$$

$$113. \log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_a \frac{a^2 - 4}{2a - x} = 1. \quad 114. \frac{\log_x(2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x}}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}.$$

Решите следующие неравенства:

$$115. 2^x < \frac{1}{4}. \quad 116. \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2. \quad 117. \left(\frac{1}{3}\right)^x < 5. \quad 118. (0,1)^{x-2} \geq 3.$$

$$119. 3^{x^2-1} \geq 27. \quad 120. 2^{x^2} < 4. \quad 121. \log_2 x \geq 0.$$

$$122. \log_{1/3}(1-x) \geq -2. \quad 123. \frac{1}{\log_a x} > 1. \quad 124. \log_7 \left(\frac{3x-2}{x-1} + 1\right) > 0.$$

$$125. \log_5(x^2 - 11x + 42) < 2. \quad 126. \log_{1/2}(4 - 2^{x^2+3x+2}) > \log_{1/2} 3.$$

$$127. \log_7 x - \log_7(2x-5) \leq \log_7 2 - \log_7(x-3). \quad 128. \frac{\lg(4x^2+x)}{\lg 2x} \geq 1.$$

$$129. \log_2 \frac{3-2x}{1-x} \leq 1. \quad 130. \log_x \frac{10}{x} \geq \log_x \frac{1}{2}.$$

$$131. \log_{0,5}(x+5) \leq \log_{0,25}(x+20). \quad 132. (0,5)^{x+\frac{6}{x}} > \frac{1}{128}.$$

$$133. \lg^2 x + 3 \lg x - 4 \geq 0. \quad 134. \log_3 \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x + 5|} \geq 0.$$

$$135. 2 + \log_2^2(x - x^2 + 2) + 3 \log_{1/2}(x - x^2 + 2) \leq 0.$$

$$136. \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/3}(x^2-3x+1)} < 1. \quad 137. \log_{1/2} \frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leq -1.$$

$$138. 3^{\lg x+2} < 3^{\lg x^2+5} - 2. \quad 139. \frac{1}{2^x+3} > \frac{1}{2^{x^2-1}}.$$

$$140. x^{(\lg x)^2-3 \lg x+1} > 1000. \quad 141. \log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1.$$

$$142. \frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}. \quad 143. \log_{x^2} \left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

$$144. 5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x. \quad 145. 9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < \frac{28}{3} \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}.$$

$$146. 2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1. \quad 147. \sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}.$$

$$148. 25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25. \quad 149. 4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$$

$$150. \frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}}.$$

$$151. (\log_{|x+6|} 2) \cdot \log_2(x^2 - x - 2) \geq 1.$$

$$152. \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

$$153. \log_{x+3}(x^2 - x) < 1.$$

$$154. \log_x 2x \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

$$155. |\sqrt{2}|x|-1| \log_2(2 - 2x^2) \geq 1.$$

$$156. (x^2 + x + 1)^x < 1.$$

$$157. \sqrt{\log_3(9x+18)} \leq \log_3(x+2).$$

$$158. 2 \cdot 8^{\frac{2x^2+1}{x}} - 4^{3x} > 0.$$

$$159. 3^{\sqrt{x}} > 2^a.$$

$$160. 2 \log_2 2 > \log_{x+a} 2; \quad \left(0 < a < \frac{1}{4}\right). \quad 161. x^{\log_a^2} < a.$$

$$162. \sqrt{\log_a \frac{3-2x}{1-x}} < 1. \quad 163. \frac{1}{5 - \log_a x} + \frac{2}{1 + \log_a x} < 1; \quad (0 < a < 1).$$

$$164. \log_a^4 x - 2 \log_a^2 x - 3 < 0.$$

$$165. \frac{3 \log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1.$$

$$166. \log_a \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0.$$

$$167. \log_a(\sqrt{25-x^2}-1) \geq \log_a(|x|+1).$$

$$168. \log_{\sqrt{2a}}(a+2x-x^2) < 2.$$

$$169. \log_x(x-a) > 2.$$

Решите следующие системы:

$$170. \begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases} \quad 171. \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = 3^{2y-x}, \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4. \end{cases}$$

$$172. \begin{cases} \log_5 x + \log_5 7 \cdot \log_7 y = 1 + \log_5 2, \\ 3 + 2 \log_2 y = \log_2 5(2 + 3 \log_3 x). \end{cases} \quad 173. \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18, \\ \log_{1/3}(x+y) = -1. \end{cases}$$

$$174. \begin{cases} x^{2y-1} = 5, \\ x^{y+2} = 3. \end{cases} \quad 175. \begin{cases} x^2 = 1 + 6 \log_4 y, \\ y^2 = y \cdot 2^x + 2^{2x+1}. \end{cases} \quad 176. \begin{cases} \log_{a^2} x - \log_{a^4} y = 3, \\ \log_{a^6} x + \log_{a^8} y = 4. \end{cases}$$

$$177. \begin{cases} \lg(x+y) = \lg x + \lg y, \\ \lg(x+ay) = \lg x + 2 \lg y. \end{cases} \quad 178. \begin{cases} \log_a y = 2y^2, \\ \log_a \sqrt{xa} + 2 \log_a \frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1.  $3\frac{1}{3}$ . 2. 10. 3.  $-\frac{2}{9}$ . 4.  $19\frac{11}{14}$ . 5. -0,1. 6.  $-\frac{1}{4}$ . 7. 0,046.  
 8.  $\frac{4}{11}$ . 9.  $-7\frac{1}{9}$ . 10. 132;  $\frac{11}{16}$ . 11.  $-0,3x^5y^6$ . 12.  $-1,2k^3b^4$ .  
 13.  $-72x^{5n}y^{3m}$ . 14.  $-72a^{3k+4}$ . 15.  $4a^2-9b^2$ . 16.  $a^{2n+4}-b^{2n}$ .  
 17.  $25x^2-20xy+4y^2$ . 18.  $4x^2+0,8x+0,04$ . 19.  $\frac{4}{9}x^{2m-4}+x^{3m-1}+\frac{9}{16}x^{4m+2}$ .  
 20.  $\frac{25}{36}x^{4n-2}y^{2n}-x^{3n}y^{n+2}+\frac{9}{25}x^{2n+2}y^4$ . 21.  $8a^3-36a^2+54a-27$ .  
 22.  $64x^9+240x^6y^2+300x^3y^4+125y^6$ . 23.  $a^3+1$ . 24.  $x^3-8$ .  
 25.  $27-4a$ . 26.  $10-9m$ . 27.  $(n+m)(m^2+n^2)$ . 28.  $(m+n)^2(m-n)$ .  
 29.  $xy(x-y)^2$ . 30.  $a(a-1)^2$ . 31.  $z^{2k-1}(z-1)(z+1)$ .  
 32.  $x^{p-1}(1-x)(1+x)(1+x^2)$ . 33.  $(n-k)(c-1)(c+1)$ . 34.  $(x-1)(a^2+b^2)$ .  
 35.  $(x+1)(x^2-4x+7)$ . 36.  $(a-x-b)(a-x+b)$ . 37.  $(a+3)(a-2)$ .  
 38.  $(a-1)(a-3)$ . 39.  $(2a+1)(3a-4)$ . 40.  $(5k-1)(2k+3)$ .  
 41.  $(a+2b)(a+b)$ . 42.  $(3x-y)(3x+y-2)$ . 43.  $(a+2)(a+3)(a+4)$ .  
 44.  $(a+b)(b+c)(a+c)$ . 45.  $\frac{a+b}{a-b}$ . 46.  $q(q-p)$ . 47.  $\frac{1}{2-p}$ . 48.  $9x^2$ .  
 49. -4. 50.  $\frac{3(x-2)}{2(x+3)}$ . 51.  $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$ . 52.  $-\frac{x+y}{x^4y^4}$ .  
 53.  $c=\frac{a}{2}(3b-a^2)$ . 55.  $\sqrt{2}-1$ . 56.  $3-\sqrt{5}$ . 57.  $3-\sqrt{5}$ .  
 58.  $5-a$ , если  $a \in ]-\infty; 5[$ ;  $a-5$ , если  $a \in [5; +\infty[$ .  
 59.  $M=2x-3$ , если  $x \in [3; +\infty[$ ;  $M=3$ , если  $x \in ]-\infty; 3]$ .  
 60.  $N=2x$ , если  $x \in [0; +\infty[$ ;  $N=0$ , если  $x \in ]-\infty; 0]$ .  
 61.  $M=2x-2$ , если  $x \in [2; +\infty[$ ;  $M=2$ , если  $x \in [0; 2]$ ;  $M=2-2x$ ,  
 если  $x \in ]-\infty; 0]$ .

62.  $N=4-2x$ , если  $x \in ]-\infty; 1]$ ;  $N=2$ , если  $x \in [1; 3]$ ;  $N=2x-4$ ,  
 если  $x \in [3; +\infty[$ .  
 63.  $M=\frac{1}{x}$ , если  $x \in ]1; +\infty[$ ;  $M=-\frac{1}{x}$ , если  $x \in ]-\infty; 0] \cup ]0; 1[$ .  
 64.  $N=8-x$ , если  $x \in ]-\infty; 3]$ ;  $N=x+2$ , если  $x \in [3; 5]$ ;  $N=3x-8$ ,  
 если  $x \in [5; +\infty[$ .  
 65.  $M=4x-5$ , если  $x \in [3; +\infty[$ ;  $M=2x+1$ , если  $x \in [1; 3]$ ;  
 $M=5-2x$ , если  $x \in ]-\infty; 3]$ .  
 66.  $N=5-3a$ , если  $a \in ]-\infty; 1]$ ;  $N=3-a$ , если  $a \in [1; 2]$ ;  $N=5a-9$ ,  
 если  $a \in [2; +\infty[$ .  
 67.  $M=\frac{a(a-1)}{2}$ , если  $a \in [-2; +\infty[$ ;  $M=-\frac{a}{2}$ , если  $a \in ]-\infty; -2]$ .  
 68.  $N=\frac{1}{m+2}$ , если  $m \in ]-\infty; 0]$ ;  $N=-\frac{1}{m+2}$ , если  $m \in ]0; 3]$ ;  
 $N=\frac{1}{m+2}$ , если  $m \in [3; +\infty[$ . 69. 128. 70. 9. 71.  $5^5$ . 72.  $\frac{1}{9}$ .  
 73. -125. 74. 9. 75.  $3a^{\frac{4}{9}}$ . 76.  $\frac{1}{125}$ . 77. 30. 78.  $x(x-y)$ . 79. 10.  
 80. 0. 81.  $4\sqrt{2}$ ;  $7\sqrt{2}$ ;  $3\sqrt{7}$ . 82.  $15\sqrt{2}$ ;  $15\sqrt{3}$ ;  $2\sqrt{70}$ .  
 83.  $3c^{-5}a^5b^{-5}\sqrt{c^{-3}b^{-2}}$ . 84.  $2a^{-3}(x-y)^3$ . 85.  $4|ac^3|\sqrt[n]{16a^4}$ , если  
 $n=2k$ ;  $4ac^3\sqrt[n]{16a^4}$ , если  $n=2k+1$ . 86.  $|ab|c^4\sqrt[m+n]{a^mb^{2n}}$ , если  
 $m+n=2l$ ;  $abc^4\sqrt[m+n]{a^mb^{2n}}$ , если  $m+n=2l+1$ . 87.  $6\sqrt{5}+7\sqrt{3}$ .  
 88.  $15\sqrt{2}-\sqrt{5}$ . 89.  $\sqrt[12]{32}$ . 90.  $2\sqrt[6]{18}$ . 91.  $2\sqrt{6}-6$ . 92.  $5\sqrt{35}-29$ .  
 93. -3. 94.  $a-b$ . 95.  $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$ . 96.  $8-b$ . 97.  $77+28\sqrt{6}$ .  
 98.  $27-12\sqrt{5}$ . 99.  $\sqrt[12]{24}$ . 100.  $-\sqrt[6]{72}$ . 101.  $\sqrt[6]{a^2b^3}$ , если  $a \geq 0$ ;  
 $-\sqrt[6]{a^2b^3}$ , если  $a < 0$ . 102. 8. 103.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 104.  $\frac{\sqrt{a}}{b}$ . 105.  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ .  
 106.  $\sqrt{3}+1$ . 107.  $\sqrt{a}+1$ . 108.  $\sqrt{b}-1$ . 109.  $(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8})\cdot\frac{4}{3}$ .  
 110.  $(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{13}+3)$ . 111.  $\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}+1$ . 112.  $\sqrt[3]{b}+1$ .

113.  $-\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2)$ . 114.  $\frac{3}{2}(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$ .

115.  $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4)$ . 116.  $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})(x^2-x\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^4})}{x^3-x^2}$ .

117.  $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{6}+1)}{5}$ . 118.  $\frac{\sqrt[3]{(x-8)^2}-2\sqrt[3]{x-8}+4}{x}$ . 119.  $A < B$ . 120.  $A > B$ .

121.  $x \in ]-\infty; 0]$ . 122.  $a > 0, x < 0$  или  $a \leq 0, x \geq 0$ . 123.  $x \in [2; +\infty[$ .  
124.  $a \in [3; +\infty[$ . 125.  $|a|$ . 126. 23. 127.  $|a-1|$ . 128.  $|x-4|$ .

129.  $-y^3$ . 130.  $a^5$ . 131.  $\sqrt{2}-1$ . 132.  $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ . 133.  $a-b$  при  $a \geq b$ ;  $b-a$  при  $a < b$ . 134.  $5-a$  при  $a \leq 5$ ;  $a-5$  при  $a > 5$ .

135.  $3-2x$ . 136.  $2\sqrt{-x}$ . 137. 6 при  $x \in ]-\infty; 0[$ ;  $6-2x$  при  $x \in [0; 6]$ ;  $-6$  при  $x \in [6; +\infty[$ . 138.  $-\frac{2x^2+2x-3}{x}$  при  $x \in ]-\infty; 0[$ ;

$\frac{3+2x}{x}$  при  $x \in ]0; 2[$ ;  $\frac{2x^2-2x+3}{x}$  при  $x \in [2; +\infty[$ . 139.  $-\frac{x+1}{x-1}$  при  $x \in ]-\infty; -1[$ ;  $\frac{x+1}{x-1}$  при  $x \in ]-1; 0[$ ;  $\frac{x-1}{x+1}$  при  $x \in [0; +\infty[$ .

140.  $x^2-4x-12$  при  $x \in ]-\infty; 2[$ ;  $(x+2)^2$  при  $x \in [2; +\infty[$ .

141.  $\frac{4-x^2}{x^2+4x-4}$  при  $x \in ]-\infty; 2[$ ;  $\frac{x+2}{2-x}$  при  $x \in [1; 2[$ ;  $\frac{x+2}{x-2}$  при  $x \in [2; +\infty[$ . 142.  $\frac{9-2x}{x}$  при  $x \in ]-\infty; 0[$ ;  $\frac{2x-9}{x}$  при  $x \in ]0; \frac{3}{2}[$ ;

$\frac{2x+3}{x}$  при  $x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[$ . 143.  $-1$ . 144.  $-\sqrt[4]{2}$ . 145. 0. 146.  $2\sqrt[4]{ax}$ .

147.  $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{4x}$ . 148.  $\frac{5}{2\sqrt{x}}$  при  $x \in ]0; 4[$ ;  $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$  при  $x \in [4; +\infty[$ .

149. 8. 150. 0. 151. 2. 152.  $\sqrt[4]{a}+\sqrt{5}$ .

## § 2

1.  $2n, n \in \mathbb{Z}$ . 2.  $2n+1, n \in \mathbb{Z}$ . 13. 1) 18; 2) 19; 3) 1; 4) 45.  
14. 1) 80; 2) 36; 3) 187; 4) 51480. 16. 1)  $a=117, b=221$ ;

2)  $a=34, b=51$ ; 3)  $a=552, b=115$ ;  $a=435, b=232$ ;

4)  $a=900, b=324$ . Указание. Если  $d = \text{НОД}(a, b)$ , то  $dx-I, dy-II$  число.  $x$  и  $y$  — взаимно простые,  $x=m^2, y=n^2, d=k^2, m$  и  $n$  — взаимно простые. 18. Да (Да).

## § 4

1. 1)  $x=3, y=2$ ; 2)  $x=1, y=2$ . 2. 1)  $5-i$ ; 2)  $14+8i$ ; 3) 24;

4)  $\frac{1}{5}-\frac{12}{5}i$ ; 5) 0; 6)  $\frac{13}{5}-\frac{1}{5}i$ ; 7)  $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$ ; 8)  $\frac{14}{5}i$ ; 9)  $-1$ ; 10) 0;  
11)  $6-i$ ; 12)  $5-i$ ; 13)  $-4$ ; 14)  $-2$ ; 15) 625; 16)  $-25$ .

3. 1)  $(a+bi)(a-bi)$ ; 2)  $(\sqrt{a}+\sqrt{bi})(\sqrt{a}-\sqrt{bi})$ ; 3)  $(\sqrt{a}+\sqrt{5i})(\sqrt{a}-\sqrt{5i})$ ;

4)  $(a+3i)(a-3i)$ . 4. 1)  $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right\}$ ; 2)  $\{-2-i; 2+i\}$ ;

3)  $z=c, c \leq 0$ ; 4)  $\{-1; 0\}$ . 5)  $\{0; -i; +i\}$ ; 6)  $\{0; -i; +i\}$ . 6. 1)  $\sqrt{2}$ ;

2)  $\sqrt{2}$ ; 3) 2; 4)  $\sqrt{5}$ ; 5) 3; 6) 0; 7) 5; 8)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 7. 1) 0; 2)  $-\frac{\pi}{2}$ ;

3)  $\frac{\pi}{2}$ ; 4) аргумент не определен; 5)  $\pi$ ; 6)  $\frac{\pi}{4}$ ; 7)  $-\frac{\pi}{4}$ ; 8)  $\frac{3\pi}{4}$ ;

9)  $-\frac{3\pi}{4}$ . 8. 1)  $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ; 2)  $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ;

3)  $6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ ; 4)  $5[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$ ; 5)  $2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ ;

6)  $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ ; 7)  $2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ ;

8)  $5(\cos 0+i\sin 0)$ ; 9)  $\cos 0+i\sin 0$ ; 10)  $\cos(\pi)+i\sin(\pi)$ ;

11)  $25\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ ; 12)  $25\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ ;

13)  $3[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$ ; 14)  $\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$ ;

15)  $\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ ; 16)  $\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ ;

- 17)  $\sqrt{3} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right]$ ; 18)  $\cos(42^\circ) + i \sin(42^\circ)$ ;  
 19)  $\cos(-111^\circ) + i \sin(-111^\circ)$ ; 20)  $2[\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]$ ;  
 21)  $\cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right)$ ; 22)  $2[\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)]$ .  
 9. 1)  $8[\cos(-25^\circ) + i \sin(-25^\circ)]$ ; 2)  $32(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)$ ; 3)  $-64$ ;

- 4)  $512 + 512\sqrt{3}i$ ; 5)  $-1024$ . 10. 1)  $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ ;  
 $\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$ ; 2)  $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$ .

11. 1)  $\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6}$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ;  
 2)  $\cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}$ ,  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ ; 3)  $\{1+i; -1-i\}$ ;  
 4)  $\sqrt[6]{8} \left( \cos \frac{3\pi + 8\pi k}{12} + i \sin \frac{3\pi + 8\pi k}{12} \right)$ ,  $k \in \{0; 1; 2\}$ .

12. Точки, лежащие на прямой:

- 1)  $y = -3x - 4$ ; 2)  $y = -x$ ; 3)  $y = -x - 1$ ; 4)  $x = -\frac{1}{2}$ ; 5)  $x = -\frac{1}{2}$ ; 6)  $y = 1$ .

13. 1) Точки внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром  $(0; 0)$ , радиусами  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ , не включая точки окружностей;

2) точки внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром  $(0; 1)$  радиусами  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 3$ , включая точки окружностей;

3) точки, лежащие ниже прямой  $y = -3x - 4$ , не включая точек самой прямой;

4) точки плоскости, лежащие выше прямой  $y = 2x + \frac{1}{2}$ , включая точки этой прямой;

5) точки, лежащие внутри окружности с центром  $(0; -2)$  радиусом  $r = 2$ , включая точки окружности;

6) точки, лежащие внутри окружности с центром  $(-1; 1)$  радиусом  $r = 1$ , не включая точек окружности.

1. 1) 2, 0,25; 2) 0; -1; 3) таких  $a$  и  $b$  не существует; 4) 1; 1.  
 2. 1)  $x$ , 5; 2)  $x+5$ , 0; 3)  $x-4$ ;  $6x-1$ ; 4)  $x$ ;  $x-1$ ; 5)  $x^2+3x+1$ ; 0;  
 6)  $x^2-x+1$ ; 0; 7) 0,  $x^2-3x+2$ ; 8) 0,  $x-4$ . 3. 1) 0, -3, 0, 5;  
 2) 30, 0, -2, 0; 3) 1, 1, 1, 1; 4) 0, 0, 0, -10; 5) 275, 32, 31, 0;  
 6) 0, -81, -80, -65. 4. 1) 3; 2)  $a$  — любое число; 3) таких  $a$  не существует; 4) 2. 5. 1) 5, -4; 2) 4, -3; 3) -4, 3; 4) таких  $a$  и  $b$  не существует. 6.  $x^3-x^2-x+1$ . 7.  $x^4+2x^3+4x^2+2x+3$ .

8.  $-x+3$ . 9. 1)  $\{-1; 6\}$ ,  $(x+1)(x+6)$ ; 2)  $\left\{-1; \frac{7}{3}\right\}$ ,  $-3(x+1)\left(x-\frac{7}{3}\right)$ ;  
 3)  $\{-1; 1; 2\}$ ,  $(x+1)(x-1)(x-2)$ ; 4)  $\{-2; -1; 2\}$ ,  $(x+2)(x+1)(x-2)$ ;  
 5)  $\left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$ ,  $2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)$ ;  
 6)  $\left\{-2; -1; \frac{1}{3}; 1\right\}$ ,  $3(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$ ;  
 7)  $\{-3; 1\}$ ,  $(x+3)^2(x-1)^2$ ; 8)  $\{-1; 3\}$ ,  $(x+1)^4(x-3)$ ;  
 9)  $\{-3; -1; 1\}$ ,  $(x+3)(x+1)(x-1)(x^2+4)$ ;  
 10)  $\{-2; -1; 1; 3\}$ ,  $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)(x^2+1)$ .  
 10. 1) 2; 2) -1,5; 3) 9; 4) -0,75; 5) -1,75; 6) -0,875; 7) 5,725;  
 8) -3,75; 9) -4,9375; 10) -3,09375. 11. 1)  $\{-1\}$ ; 2)  $\{-2\}$ ; 3)  $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$ ;  
 12. 1)  $x^2+2ax+4b=0$ ; 2)  $4x^2+2ax+b=0$ ; 3)  $x^2-ax+b=0$ ;  
 4)  $x^2+(a-b)x-ab=0$ ; 5)  $x^2+(2b-a^2)x+b^2=0$ .  
 13. 1)  $x^3-4x-8=0$ ; 2)  $x^3+x^2-1=0$ ; 3)  $x^3-2x^2+x-1=0$ ;  
 4)  $x^3+x^2-1=0$ .

1.  $\{1\}$ . 2.  $x$  — любое число. 3.  $\{5\}$ . 4.  $\{7\}$ . 5.  $\{-11; 1\}$ .  
 6.  $\{-3\}$ . 7.  $\{4\}$ . 8.  $\{2\}$ . 9.  $\left\{\frac{8}{3}; 4\right\}$ . 10.  $\{-4; 2\}$ . 11.  $\{-2; 8\}$ .

12.  $\left\{ \frac{2}{a-1} \right\}$  при  $a \neq 1$ ,  $\emptyset$  при  $a = 1$ . 13.  $\left\{ \frac{10}{2-a} \right\}$  при  $a \neq 2$ ,  $\emptyset$  при  $a = 2$ . 14.  $\left\{ \frac{1-a}{1-2a} \right\}$  при  $a \neq \frac{1}{2}$ ,  $\emptyset$  при  $a = \frac{1}{2}$ . 15.  $\left\{ \frac{3a}{a-1} \right\}$  при  $a \neq 1$ , и  $a \neq -2$ ,  $\emptyset$  при  $a = 1$  или  $a = -2$ . 16.  $\left\{ \frac{a}{a-2} \right\}$  при  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $a \neq 2$ ,  $\emptyset$  при  $a = 1$ ,  $a = 2$ ,  $a = 0$ . 17.  $\left\{ \frac{1}{4} \right\}$  при  $a \neq 0$ ,  $a \neq \pm \frac{1}{4}$ ,

$x$  — любое число, кроме 0, если  $a = 0$ ,  $\emptyset$  при  $a = \pm \frac{1}{4}$ .

18.  $\{a^2 + 1\}$ , если  $a \neq 0$ ,  $a \neq \pm 1$ ,  $x$  — любое число, кроме 0, если  $a = 0$ ,  $x$  — любое число, кроме 1, если  $a = 1$ . 19.  $\{2; 3\}$ .

20.  $\{-1; 5\}$ . 21.  $\left\{-\frac{5}{3}; 1\right\}$ . 22.  $\left\{-1; \frac{1}{5}\right\}$ . 22a.  $\{-2 + i; -2 - i\}$ .

23.  $\left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ . 24.  $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ . 25.  $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$ . 26.  $\left\{-\frac{13}{3}; 6\right\}$ .

27.  $\{1, 6; 4\}$ . 28.  $\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$ . 29.  $\{-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}\}$ .

30.  $\left\{-\frac{14}{5}; \frac{1}{3}\right\}$ . 31.  $\{-4, 7; -1\}$ . 32.  $\{4; 5\}$ . 33.  $\left\{a + 1; \frac{a+1}{a}\right\}$ ,  $a \neq 0$ .

34.  $\left\{\frac{-5-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right\}$ . 35.  $\{2a; 2\}$ . 36.  $\{a-1; a+1\}$ . 37.  $\left\{\frac{a+b}{2}\right\}$  при  $a \neq b$  и  $\emptyset$  при  $a = b$ . 38.  $\{a; 5a\}$  при  $a \neq 0$  и  $\emptyset$  при  $a = 0$ .

39.  $\left\{-\frac{2}{3}m; \frac{3}{2}m\right\}$  при  $m \neq 0$  и  $\emptyset$  при  $m = 0$ . 40.  $\left\{-\frac{3}{4}b; b\right\}$  при  $b \neq 0$  и  $\emptyset$  при  $b = 0$ . 41.  $\{-3; 1; 2\}$ . 42.  $\{2; 2 + i\sqrt{3}; 2 - i\sqrt{3}\}$ .

43.  $\{-2; -1; 1; 3\}$ . 44.  $\{-1; 2\}$ . 45.  $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$ .

46.  $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$ . 47.  $\left\{1; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$ . 48.  $\{-2; 1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$ .

49.  $\left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}; \frac{1-i}{\sqrt{2}}; \frac{-1+i}{\sqrt{2}}; \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right\}$ . 50.  $\{-1; 1; -i; i\}$ .

51.  $\left\{1; \frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}; \frac{\sqrt{5}-1-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right\}$ . 52.  $\left\{-2; \frac{1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ .

53.  $\{-2; -1; 1; 2\}$ . 54.  $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; -i; i\}$ .

55.  $\{8 - \sqrt{73}; 8 + \sqrt{73}; 8 - \sqrt{57}; 8 + \sqrt{57}\}$ . 56.  $\left\{-2; 1; \frac{-1+i\sqrt{19}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{19}}{2}\right\}$ .

57.  $\{1; 3; 2 + i3; 2 - i3\}$ . 58.  $\left\{2; 2; \frac{5+i\sqrt{3}}{2}; \frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ .

59.  $\left\{-4; -2; \frac{-5-i\sqrt{7}}{2}; \frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\right\}$ .

60.  $\left\{1; i; -i; \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2}\right\}$ . 61.  $\{-5; 1\}$ . 62.  $\{2; 6; 4 + i\sqrt{10}; 4 - i\sqrt{10}\}$ .

63.  $\left\{\frac{3+\sqrt{21}}{2}; \frac{3-\sqrt{21}}{2}; \frac{3-i\sqrt{11}}{2}; \frac{3+i\sqrt{11}}{2}\right\}$ . 64.  $\left\{\frac{-5-\sqrt{85}}{2}; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+\sqrt{85}}{2}\right\}$ . 65.  $\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; 1; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ . 66.  $\left\{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \pm i\right\}$ . 67.  $\left\{-2; -1; 1; \frac{1}{2}\right\}$ . 68.  $\left\{-\frac{5}{3}; -\frac{3}{5}; 1; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$ .

69.  $\left\{-\frac{1}{2}; 2; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\right\}$ . 70.  $\{-2; 6; 3 - \sqrt{21}; 3 + \sqrt{21}\}$ .

71.  $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; i; -i\right\}$ .

72.  $\left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{-5+3i\sqrt{19}}{14}; \frac{-5-3i\sqrt{19}}{14}\right\}$ . 73.  $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1+i\sqrt{35}}{6}; \frac{1-i\sqrt{35}}{6}\right\}$ .

74.  $\left\{-1; \frac{2}{3}; 1; \frac{3}{2}; \frac{-3+4\sqrt{10}i}{13}; \frac{-3-4\sqrt{10}i}{13}\right\}$ .  
 75.  $\left\{-1; 9; \frac{5+\sqrt{61}}{2}; \frac{5-\sqrt{61}}{2}\right\}$ . 76.  $\left\{7+\sqrt{34}; 7-\sqrt{34}; \frac{7+i\sqrt{11}}{2}; \frac{7-i\sqrt{11}}{2}\right\}$ .  
 77.  $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-11+3i\sqrt{11}}{2}; \frac{-11-3i\sqrt{11}}{2}\right\}$ . 78.  $\{1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}; 3+i\sqrt{3}; 3-i\sqrt{3}\}$ . 79.  $\{0; a+b\}$  при  $a \neq b$ ,  $x$  — любое число, если  $a = b$ . 80.  $\{-1-\sqrt{7}; -1+\sqrt{7}; 4+2i\sqrt{2}; 4-2i\sqrt{2}\}$ .

§ 9

1.  $\{(2; 3)\}$ . 2.  $\{(2; 1)\}$ . 3.  $\{(3; 2)\}$ . 4.  $\{(2; 3)\}$ . 5.  $\{(0; 0)\}$ . 6.  $\{y = x, x \text{ — любое число}\}$ . 7.  $\emptyset$ . 8.  $\emptyset$ . 9.  $\left\{6; 2; \left(\frac{10}{3}; -\frac{10}{3}\right), (-10; 10); (-2; -6)\right\}$ . 10.  $\{x \in [0; 1], y = 2 - x\}$ . 11.  $\left\{1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$ . 12.  $\{(0; 0; 0)\}$ . 13.  $\{(1; -3; -2)\}$ . 14.  $\{(2; 1; -1)\}$ . 15.  $a = 3$ . 16.  $a = 0$ .  
 17.  $\left\{-\frac{a}{a+1}; \frac{a^2+a+1}{a+1}\right\}$  при  $a \neq \pm 1$ ,  $\{y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}$  при  $a = 1$ ,  $\emptyset$  при  $a = -1$ . 18.  $\{(0; 0)\}$  при  $a \neq -2$  и  $a \neq 8$ ,  $\{y = x, x \in \mathbb{R}\}$  при  $a = -2$ ,  $\left\{y = -\frac{2}{3}x, x \in \mathbb{R}\right\}$  при  $a = 8$ . 19.  $\left\{\frac{3}{3-m}; \frac{-3}{m-3}\right\}$  при  $m \neq \pm 3$ ,  $\left\{y = \frac{2x-3}{4}, x \in \mathbb{R}\right\}$  при  $m = -3$ ,  $\emptyset$  при  $m = 3$ . 20.  $\left\{\frac{a+1}{a+3}; \frac{2a+4}{a+3}\right\}$  при  $a \neq -3$  и  $a \neq 5$ ,  $\left\{y = \frac{5}{2} - x, x \in \mathbb{R}\right\}$  при  $a = 5$ ,  $\emptyset$  при  $a = -3$ .  
 21.  $a = 1, b = -1$ . 22.  $\{(0; 2)\}$ . 23.  $\{(1; 0)\}$ . 24.  $\{(1; 1)\}$ .  
 25.  $\{(2; 3); (3; 2)\}$ . 26.  $\{(2; -5), (5; -2)\}$ . 27.  $\{(1; 2), (2; 1), (1+i\sqrt{2}; 1-i\sqrt{2}), (1-i\sqrt{2}; 1+i\sqrt{2})\}$ . 28.  $\{(2; 1)\}$ . 29.  $\{(3; 5), (5; 3)\}$ ,  
 $\left\{\frac{-9+\sqrt{21}}{2}; \frac{9+\sqrt{21}}{2}; \frac{-9-\sqrt{21}}{2}; \frac{-9+\sqrt{21}}{2}\right\}$ .

30.  $\{(-5; 2), (2; -5), (2; 3), (3; 2)\}$ . 31.  $\{(3; 1), (-3; -1)\}$ .  
 32.  $\left\{4; -3; (-4; 3), \left(-\frac{7}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{7}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ .  
 33.  $\left\{3; 1; (-1; -3), \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-3-3i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ .  
 34.  $\left\{1; -3; (3; -1), \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-3-3i\sqrt{3}}{2}; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3i\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-3+3i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ .  
 35.  $\{(0; 0), (1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1), (\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (\sqrt{7}; -\sqrt{7}), (-\sqrt{7}; \sqrt{7})\}$ . 36.  $\left\{1; 0; (1; -2), \left(1; \frac{3}{4}\right), (-2; 1), \left(-\frac{3}{2}; 2\right); \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}; \frac{-7+\sqrt{17}}{8}\right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}; \frac{-7-\sqrt{17}}{8}\right)\right\}$  при  $x = 0$ ,  $y$  — любое число. 37.  $\left\{-2; -\frac{2}{5}; \left(\frac{2}{5}; 2\right), \left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5}-5}{4}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}; \frac{-5-\sqrt{5}}{4}\right)\right\}$ .  
 38.  $\{(9; 18), (18; 9)\}$ . 39.  $\left\{3; 2; (-2; -3), \left(\frac{1+i\sqrt{31}}{2}; \frac{-1+i\sqrt{31}}{2}\right), \left(\frac{1-i\sqrt{31}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{31}}{2}\right)\right\}$ . 40.  $\{(0; 2), (2; 0), (1+i\sqrt{7}; 1-i\sqrt{7}), (1-i\sqrt{7}; 1+i\sqrt{7})\}$ . 41.  $\{(1; 2; 3)\}$ . 42.  $\{(1; 2; 3)\}$ . 43.  $\{(2; 1; -3), (-2; -1; 3)\}$ . 44.  $\{(-3; -4; -2)\}$ . 45.  $\{(1; 2; -1), (-1; -2; 1)\}$ .  
 46.  $\left\{0; 0; 0; (1, 2, 1), (2, 1, 1), \left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}$ .  
 47.  $\{(2; 1)\}$ . 48.  $\{(2; 3)\}$ .



1.  $]-\infty; 0[$ . 2.  $[3; +\infty[$ . 3.  $]-\infty; +\infty[$  при  $a = 0$ ;  $]-\frac{1}{a}; +\infty[$  при  $a > 0$ ;  
 $]-\infty; -\frac{1}{a}[$  при  $a < 0$ . 4.  $\emptyset$  при  $a = 0$ ;  $]-\infty; -\frac{2}{a}[$  при  $a > 0$ ;  
 $]-\frac{2}{a}; +\infty[$  при  $a < 0$ . 5.  $]-\infty; +\infty[$  при  $a = 0, b > 0, \emptyset$  при  $a = 0,$   
 $b < 0$ ;  $[-\frac{b}{a}; +\infty[$  при  $a > 0$ ,  $]-\infty; -\frac{b}{a}[$  при  $a < 0$ . 6.  $]-\infty; -3]U[-1; +\infty[$ .  
7.  $[-2; 4]$ . 8.  $]-\infty; +\infty[$  при  $a = 0, b \in [-1; 1]$ ;  $\emptyset$  при  $a = 0,$   
 $b \in ]-\infty; -1[$ U]1;  $\infty[$ ;  $[-\frac{1+b}{a}; \frac{1-b}{a}]$  при  $a > 0$ ;  $[\frac{1-b}{a}; -\frac{1+b}{a}]$  при  
 $a < 0$ . 9.  $]a+1; +\infty[$  при  $a > 1$ ;  $]-\infty; a+1[$  при  $a < 1$ ;  $\emptyset$  при  $a = 1$ .  
10.  $]-\infty; -2]U]0; +\infty[$ . 11.  $]-0,75; -0,5[$ . 12.  $]4; 7]$ . 13.  $]-\infty; 2[$ .  
14.  $\emptyset$ . 15.  $(4; 5; 6)$ . 16.  $[8; 24]$ . 17. Раса от  $5\frac{5}{7}$  кг до  $8\frac{4}{7}$  кг.  
18. 42, 24, 30 деталей. 19.  $]-\infty; 2]U]3; +\infty[$ . 20.  $]-\infty; -2]U[-1; +\infty[$ .  
21.  $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ . 22.  $]\frac{1}{2}; 2[$ . 23.  $\{-1\}$ . 24.  $]-\infty; +\infty[$ . 25.  $]-\infty; +\infty[$ .  
26.  $\emptyset$ . 27.  $]-2; 1]U]3; +\infty[$ . 28.  $]-\infty; -1,5]U[\pi; 4]$ .  
29.  $]-\infty; -4]U[-2; \frac{5}{3}]U]3; +\infty[$ . 30.  $]-\infty; -4]U[-2; 1]U]3; 5[$ .  
31.  $\{0\}U[\frac{3}{2}; 4]U]6; +\infty[$ . 32.  $]-\infty; -3]U]0; 4]U\{1\}, \{3\}$ . 33.  $]1; 4[$ .  
34.  $]-\infty; -1]U]3; 7[$ . 35.  $]-\infty; -2]U]2; +\infty[$ . 36.  $[-1; 2]$ .  
37.  $]0; 2]U]3; +\infty[$ . 38.  $]-4; -2]U]0; 1[$ . 39.  $]-\infty; 1]U[\frac{3}{2}; 2]U]3; +\infty[$ .  
40.  $]-\infty; -2]U[-1; 0]$ . 41.  $]1-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2}]U[\frac{3}{2}; 1+\frac{\sqrt{7}}{2}[$ . 42.  $]\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1[$ .  
43.  $]-\frac{3+\sqrt{65}}{2}; 3[$ . 44.  $]1; 3[$ . 45.  $]-\infty; -2]U]0; 1]U]1; +\infty[$ .

46.  $[-1; 2]U]8; 5+\sqrt{18}]$ . 47.  $]-\infty; \frac{\sqrt{17}-3}{2}]U[\frac{1+\sqrt{41}}{2}; +\infty[$ .  
48.  $[-5; -\frac{5}{3}]U[\frac{13}{3}; +\infty[$ . 49.  $]-\infty; 2[$ . 50.  $]-1; 0]U]0; \frac{4}{3}[$ .  
51.  $]-\frac{1}{2}; 1[$ . 52.  $]-2; +\infty[$ . 53.  $]-1; 2[$ . 54.  $[-2; 1]$ . 56. 1)  $]0; 12[$ ;  
2)  $]-1,4[$ ; 3)  $]-\infty; -3]U]1; +\infty[$ ; 4)  $]-\infty; \frac{5-2\sqrt{7}}{3}[$ . 57.  $]-1; 3[$ .  
58.  $[3+2\sqrt{2}; +\infty[$ . 59.  $[\frac{16}{17}; 2[$ . 60.  $\emptyset$ . 61.  $\emptyset$  при  $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ;  
 $[a+1-\sqrt{a^2-1}; a-1+\sqrt{a^2-1}]$  при  $a \in ]-\infty; -\sqrt{2}]U]\sqrt{2}; +\infty[$ .  
62. 1)  $[-5; 1[$ ; 2)  $]-10; 74[$ . 63.  $]-\frac{13}{4}; 3[$ . 64.  $]-1; 0]U]0; \frac{1}{2}[$ .

1.  $\{2\}$ . 2.  $\{4\}$ . 3.  $\{5\}$ . 4.  $\{3\}$ . 5.  $\{-1\}$ . 6.  $\{2\}$ . 7.  $\{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\}$ .  
8.  $\{-2; -\frac{5}{3}; 1; \frac{4}{3}\}$ . 9.  $\{6\}$ . 10.  $\{5\}$ . 11.  $\{-4; 4\}$ . 12.  $\{3\}$ . 13.  $\{-2-\frac{\sqrt{51}}{2}\}$ .  
14.  $\{\frac{2+9\sqrt{7}}{2}\}$ . 15.  $\{0; -1\}$ . 16.  $\{1\}$ . 17.  $\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\}$ . 18.  $\{3\}$ . 19.  $\{\frac{139}{127}\}$ .  
20.  $\{\frac{16}{9}\}$ . 21.  $\{1\}$ . 22.  $\{-1\}$ . 23.  $\{-1; 1\}$ . 24.  $\{]-\infty; -2]\}$ .  
25.  $\{-1; +\infty\}$ . 26.  $\{-3; 1\}$ . 27.  $\{2; 11\}$ . 28.  $\{1; 20\}$ . 29.  $\{1; 2; 10\}$ .  
30.  $\{\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{5+\sqrt{73}}{14}\}$ . 31.  $\{a^2-3\}$  при  $a \in [0; +\infty[$ ;  $\emptyset$  при  $a \in ]-\infty; 0[$ .  
32.  $\{a^2+3a+1\}$  при  $a \in [-1; +\infty[$ ;  $\emptyset$  при  $a \in ]-\infty; -1[$ .  
33.  $\{\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}\}$  при  $a \in [2; +\infty[$ ;  $\emptyset$  при  $a \in ]-\infty; 2[$ .  
34.  $\{\frac{a^4-4a^2+16}{4a^2}\}$  при  $a \in [-2; 0[$ ;  $\emptyset$  при  $a \in ]-\infty; -2]U]0; +\infty[$ .

35.  $\left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ . 36.  $(0; a)$ . 37.  $(0)$ . 38.  $\emptyset$  при  $a \in ]-\infty; -\frac{1}{4}[$ ;  
 $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}\right\}$  при  $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right[$ ;  $\left\{\frac{-1 - \sqrt{4a+1}}{2}\right\}$  при  $a \in [0; 1[$ ;  
 $\left\{\frac{-1 - \sqrt{4a+1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2}\right\}$  при  $a \in [1; +\infty[$ . 39.  $\emptyset$  при  
 $a \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$ ;  $(0)$  при  $a = 0$ ;  $\left\{\frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}\right\}$  при  $a \in [1; +\infty[$ .  
40.  $[-3; 1[$ . 41.  $]-5; 4]$ . 42.  $\left[-\frac{1}{3}; 0[ \cup ]8; +\infty[$ . 43.  $]-\infty; -16[ \cup ]-1; \frac{1}{3}]$ .  
44.  $[-32; 4[$ . 45.  $]-\infty; 6[$ . 46.  $]-\infty; -3[ \cup ]-2; \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}]$ .  
47.  $]-\infty; 1[ \cup ]2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6}]$ . 48.  $\left[\frac{5}{2}; 3[$ . 49.  $\left] \frac{2}{3}; +\infty[$ .  
50.  $]-19; 1[ \cup ]6; +\infty[$ . 51.  $\left[\frac{3}{2}; 3[ \cup ]6; +\infty[$ . 52.  $\left[7 + \frac{\sqrt{7}}{2}; 9\right]$ .  
53.  $\left[\frac{5 + 4\sqrt{10}}{9}; +\infty[$ . 54.  $]0; 5[$ . 55.  $]9; 10[ \cup ]34; 35[$ .  
56.  $\left]1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[ \cup \left] \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty[$ . 57.  $]-\infty; 2]$  при  $a \in ]-\infty; -1[$ ;  
 $\left]2 - \frac{1}{(a+1)^2}; 2\right]$  при  $a \in ]-1; +\infty[$ . 58.  $[-1; +\infty[$  при  $a \in ]-\infty; 0[$ ;  
 $\left[-1; \frac{1}{a^2} - 1\right]$  при  $a \in ]a; +\infty[$ . 59.  $((1; 9); (9; 1))$ . 60.  $((6; 1))$ .  
61.  $\left\{\left(\frac{24}{23}; 24\right), \left(3; \frac{3}{2}\right)\right\}$ . 62.  $((2; 1), (1; 2))$ . 63.  $((3; 2), (3; -2),$   
 $(-\sqrt{5 + \sqrt{61}}; -\sqrt{\sqrt{61} - 5}), (-\sqrt{5 + \sqrt{61}}; \sqrt{\sqrt{61} - 5}))$ . 64.  $((5; 3),$   
 $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{981} + 9}{2}}; -\sqrt{\frac{\sqrt{981} - 9}{2}}\right)$ . 65.  $((3; 4), (0; -11))$ .

66.  $\{(16; 4), (4; 16), (10 + \sqrt{99}; 10 - \sqrt{99}), (10 - \sqrt{99}; 10 + \sqrt{99})\}$ .  
67.  $((8; -1), (1; -8))$ . 68.  $\left\{\left(\frac{5}{2}; 6\right)\right\}$ . 69. Решение существует при  
 $b > a \geq 0$ ;  $\left\{\left(\frac{ab}{a+b}; \frac{a+b}{4}\right)\right\}$  при  $a, b \in ]0; +\infty[$ ;  $\left\{\left(0; \frac{b}{4}\right)\right\}$  при  $a = 0,$   
 $b \in ]0; +\infty[$ ;  $((0; 0))$  при  $a = 0, b = 0$ . 70.  $\left\{\left(\frac{5}{8}a^2; a^2\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right\}$  при  
 $a \in [0; +\infty[$ ;  $\left\{\left(\frac{5}{8}a^2; -a^2\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\right\}$  при  $a \in ]-\infty; 0[$ .

## § 12

1. 20 км. 2. 240 км. 3.  $\frac{S}{v_1 + v_2}$ . 4.  $v_1 > v_2$ ;  $\frac{S}{v_1 - v_2}$ . 5. 50 км/ч  
или 110 км/ч. 6.  $\frac{11}{9}$  или  $\frac{19}{9}$ . 7. 450 га. 8. 24,5 т; 35 т;  
40,25 т. 9. 5%. 10. 94%. 11. 10 кг;  $\frac{80 - 2p}{p - 10}$  кг;  $p \in ]10; 40]$ .  
12. 20 мл;  $\frac{300 - 30q}{q - 15}$  мл,  $q \in [10; 15[$ . 13.  $\frac{15 - 3r}{r - 10}$  л;  $r \in [5; 7]$ .  
14.  $\frac{60 - 2p}{p - 40}$  кг,  $p \in [30; 36]$ . 15. 1996. 16. 142857. 17.  $21 \frac{9}{11}$  мин.  
18.  $65 \frac{5}{11}$  мин. 19. 12 л, 8 л, 7 л. 20. 13 л, 7 л, 4 л. 21. 3 м.  
22. 16 см, 8 см. 23. 45 км/ч. 24. 50 км/ч. 25. 20 км/ч.  
26. 1 км/ч. 27.  $\frac{3d - c + \sqrt{9d^2 + 2cd + c^2}}{2}$  км/ч.  
28.  $\frac{vT + 4a + \sqrt{v^2T^2 + 4avT + 16a^2}}{2T}$  км/ч. 29. 10 ч; 15 ч.  
30.  $\frac{t + \sqrt{t^2 + 8tT}}{2}$  мин;  $\frac{-t + \sqrt{t^2 + 8tT}}{2}$  мин. 31. 9 кг, 7 кг или 5 кг, 3 кг.

32. 15 человек. 33. 132; 94. 34.  $\frac{7}{10}$ . 35. 8 л, 7 л. 36. 4,5%.
37.  $\frac{8 \pm \sqrt{38}}{2}$  ч;  $\frac{\sqrt{74} - 4}{2}$  ч. 38.  $5 \pm \sqrt{5}$ ;  $5 \pm \sqrt{3}$  ч. 39. 3 порции первого сорта, 7 порций второго сорта. 40. 5 или 19 человек.
41. 225 м, 15 м/с. 42.  $\frac{l_1 - l_2}{t_1 - t_2}$  м/с,  $\frac{l_1 t_2 - l_2 t_1}{t_1 - t_2}$  м,  $\frac{l_1 t_1 - l_2 t_2}{l_1 - l_2}$  с.
43. 63 км, 31,5 км. 44. 4 км, 10 км; 4 ч. 45. 50 шт; 30 шт.
46. 112 и 168. 47. 16,2 руб. и 12,24 руб. 48. 220 и 180.
49.  $\frac{7000}{100 - a}$  кг;  $\frac{7000 - 140a}{100 - a}$  кг. 50.  $\frac{p_1 - p_2}{d_1 - d_2}$ ,  $\frac{p_2 d_1 - p_1 d_2}{d_1 - d_2}$ ,  $p_2 d_1 > p_1 d_2$ .
51. 9 частей первого сплава, 35 частей второго сплава.
52. 0,5 кг; 1 кг. 53. 3 км/ч; 4 км/ч; 5 км/ч. 54. 3 км, 4 км, 4,5 км; в 3 км от С. 55.  $\frac{m + n + 2}{mn - 1}$  раз. 56.  $\frac{2abc}{ab + ac - bc}$  дней,  $\frac{2abc}{ba + bc - ac}$  дней,  $\frac{2abc}{ca + cb - ab}$  дней. 57. 480 л, 400 л, 560 л.
58. 60%. 59. 16 ч; 60 ч. 60.  $\left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} - \frac{2}{t_2} \right) \right]^{-1}$ . 61.  $\frac{2mn}{m + n}$  суток.
62. 24 ч. 63. 8 км. 64. 0,5 км; 500 м. 65.  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ;  $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ .
66.  $\frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}}$ ;  $\frac{\sqrt{3} \mp 1}{2}$ . 67.  $\frac{2T \pm t + \sqrt{4T^2 + t^2}}{2}$ . 68. 6 ч; 3 ч.
69.  $\frac{c(m + \sqrt{m^2 + 4mn})}{2mn}$  м/с,  $\frac{c(\sqrt{m^2 + 4mn} - m)}{2mn}$  м/с. 70. Если  $T \geq (\sqrt{2} + 1)t$ , то успеют; если  $T < (\sqrt{2} + 1)t$ , то не успеют. 71. 27; 72. 15.
73. 23. 74. 63. 75. 1 м/с, 4 м/с,  $\frac{297}{73}$  м/с,  $\frac{208}{73}$  м/с.
76. 14 км/ч, 2 км/ч. 77. 7,7 ч. 78.  $3 \frac{9}{35}$  ч. 79. 1 сутки.
80. 10 ч 29 мин. 81. 150 т, 180 т. 82.  $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n} - \sqrt{m}}$ . 83. 179; 28 и 60; 147.

84. 136; 345. 85. 25 чел; 27 чел; 10 чел; 42 чел. 86. 19 руб; на 4 руб. 87. 3 ч. 88. 7,5 ч. 89. 41 и 31; 62 и 40. 90. 23 и 22; 9 и 6; 7 и 2. 91. 552 и 115; 435 и 232. 92. 51 и 34. 93. 8. 94. 38. 95. 11 "двоек", 7 "троек", 10 "четверок", 2 "пятерки".

96. Третья. 97.  $\left[ \frac{a + \sqrt{a^2 + (vt_2)^2}}{t_2}; \frac{a + \sqrt{a^2 + (vt_1)^2}}{t_1} \right]$ . 98. [1, 5, 42].
99. 16 га. 100. 36 м<sup>3</sup>. 101. 4 ч. 102. 18 ч. 103. 72 кв. км.
104. В реке с более быстрым течением. 105. В 10 ч. 20 мин; 12 миль. 106. 16 км. 107. 2573. 108. 1738. 109. 8 км/ч;  $1 \frac{3}{32}$  ч.
110. 4 л/с; 192 л. 111. 4 л при  $p > 70a$ , где  $a \in [0; 4]$  при  $p = 70$ ; 0 при  $p > 70$ . 112. 2 кг при  $p < 60$ ;  $a$  кг, где  $a \in [0; 2]$  при  $p = 60$ ; 0 при  $p < 60$ . 113. 1 м. 114.  $\frac{4}{3}$  м.

### § 13

1. 1)  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $x_{20} = \frac{1}{\sqrt{20}}$ ;  $x_{30} = \frac{1}{\sqrt{50}}$ ;  
2)  $x_1 = x_3 = -1$ ;  $x_2 = x_{20} = x_{30} = 1$ ; 3)  $x_1 = 1$ ;  $x_3 = -1$ ;  $x_2 = x_{20} = x_{30} = 0$ .
2. 1)  $x_4 = 37$ ,  $x_5 = 129$ ; 2) 8. 5. Последовательности, перечисленные в пунктах 1), 2), 3), 6), 8). 6.  $x_n = 2^n - n$ . 8.  $x_n = 5n - 4$ . 12. 1) 2; 2) 3; 3) -3; 4) -6; 5) 3; 6) 2; 7) 2; 8) 2; 9) 7; 10) 3; 11) 2; 12) 3.
13. 1) {10, 11, 12, ..., n, ..., |n ∈ N}; 2) {100, 101, 102, ..., n, ..., |n ∈ N}; 3) {27, 28, 29, ..., n, ..., |n ∈ N}; 4) {59, 60, 61, ..., n, ..., |n ∈ N}; 5) {2, 3, ..., 101}; 6) {1, 2, 3, 4}. 14. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет.
15. 1) {2; 4; 6}; 2) {1; 3; 5}. 16. а) 0; 2) 0 и 1; 3) -1; 4) 1; 5) 0; 6) 0. 17. 1)  $a = 1$ ,  $n_1 = 19$ ,  $n_2 = 199$ ,  $n_3 = 1999$ ; 2)  $a = 2$ ,  $n_1 = 30$ ,  $n_2 = 300$ ,  $n_3 = 3000$ ; 3)  $a = 0$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 11$ ,  $n_3 = 32$ ; 4)  $a = 0$ ,  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 9$ ,  $n_3 = 12$ ; 5)  $a = 0$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$ ,  $n_3 = 7$ .
20. 1) Указание. Воспользуйтесь неравенством  $|b| - |c| \leq |b - c|$ ;

2) не всегда. 21. 1) {1}; 2) {-1; 1}. 22. Нет, например,  $c_n = \frac{1}{n}$ ,  $d_n = 0$ ;  $c_n > d_n$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ . 25. 1)  $d$ ; 2) 0. 27. 1) 3;

2)  $-\pi$ . 28. Указание. Доказательство проведите методом математической индукции. 29. 1) 1; 2) 31; 3) 2; 4) 14,4.

31. 1) 8; 2) 84; 3)  $\frac{1}{5}$ ; 4)  $-2,5$ . 32. Решение. Пусть  $L$  – целое число, такое что  $L \leq |a| \leq L+1$ . Положим  $n > L$ . Тогда

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left| \frac{a^L}{L!} \cdot \frac{a}{L+1} \cdot \frac{a}{L+2} \cdots \frac{a}{n} \right| = \left| \frac{a^L}{L!} \right| \left| \frac{a}{L+1} \right| \left| \frac{a}{L+2} \right| \cdots$$

$$\cdots \left| \frac{a}{n} \right| < \left| \frac{a^L}{L!} \right| \left| \frac{a}{L+1} \right| \left| \frac{a}{L+1} \right| \cdots \left| \frac{a}{L+1} \right| = \left| \frac{a^L}{L!} \right| \left| \frac{a}{L+1} \right|^{n-L}$$

А так как  $\left| \frac{a^L}{L!} \right|$  – последовательность ограниченная, а  $\left| \frac{a}{L+1} \right|^{n-L}$  – бесконечно малая, то исходный предел равен нулю.

35. Да. 36. Нет. Указание. Рассмотрите последовательности

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}. \quad 37. \text{ Нет. } 38. 1. \quad 39. \text{ Не всегда. } 40. 1.$$

$$41. \frac{2}{3}. \quad 42. \frac{1}{2}. \quad 43. 4. \quad 44. \frac{1}{3}. \quad 45. \frac{3}{5}. \quad 46. \frac{8}{3}. \quad 47. \frac{4}{9}.$$

48. 1. Указание. Используйте тождество  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

49.  $\frac{1}{2}$ . 50. 0. 51. 2. 52. 5. 53. 9. 54. Указание. Воспользуйтесь

равенством  $|\sqrt{x_n} - 1| = \left| \frac{x_n - 1}{\sqrt{x_n} + 1} \right| = \left| \frac{\alpha_n}{\sqrt{x_n} + 1} \right|$  и ограниченностью

последовательности  $y_n = \frac{1}{\sqrt{x_n} + 1}$ . 56. 1. 57. 2. 58.  $\frac{1}{2}$ . 59. 2.

60. 0. 61. 0. 65. Последовательности, перечисленные в п. п.: 1), 3), 4), 6). Все эти последовательности ограничены.

1. 1), 2). 2. 1) Да. 2) Нет. 3. 23. 4.  $\frac{2}{11}$ . 5.  $d = \frac{\pi - 1}{n - 1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ).

7. 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. 8. Могут. 9. 5050. 10. Да.

11.  $a_m = \frac{A+B}{2}$ ,  $a_n = \frac{(2n-m)A+mB}{2n}$ . 14.  $\frac{n}{4n+1}$ . 15. 55. 16. 71.

17.  $a_1 = -1$ ,  $d = 4$ . 18. 4380. 19. 795. 22. 3, 5, 7; 4, 5, 6.

23.  $a_1 = 4$ ,  $d = 8$ . 24.  $a_1 = 2$ ,  $d = 4$ . 26. 3. 27. 1), 3), 4). 28. Нет.

29. Могут при  $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ . 30.  $\frac{B^{\frac{n}{n-1}} - A^{\frac{n}{n-1}}}{B^{\frac{1}{n-1}} - A^{\frac{1}{n-1}}}$ . 31. 1, 5, 25... или

25, 5, 1. 32. 3. 33. 2, 4, 8... или 8, 4, 2... 36.  $\frac{S_2}{S_1}$ . 37.  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{3}{8}$ ;  $\frac{3}{16}$

или  $-\frac{2}{9}$ ;  $\frac{2}{27}$ ;  $\frac{2}{81}$ ... 38.  $\frac{242}{81}$ . 39. 1, 2, 4, 8... или 8, 2, 4, 1...

40.  $\frac{1}{9} \left( \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$ . 41.  $n - 1$ . 43.  $q = \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$ , если  $k$  – нечетное,

$q = \pm \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$ , если  $k$  – четное. 44.  $a = 2$ ,  $b = 32$ . 45.  $p = \left( \frac{S}{T} \right)^{\frac{n}{2}}$ . 47.  $n = 5$ ,

$x = \sqrt[5]{2}$ . 48.  $d = -2a \pm a\sqrt{2}$ . 49.  $\sqrt[3]{45}$ . 50.  $S = \frac{(a+x)^3}{(a-x)4ax}$ ,  $x > 0$ .

51.  $p = (8 + 4\sqrt{2})a$ ,  $S = 2a^2$ . 52.  $S = a^2\sqrt{3}$ ,  $p = 6a(2 + \sqrt{3})$ . 53.  $16R^2$ ,

$\frac{8R^3}{3\sqrt{3}-1}$ ,  $6\pi R^3$ ,  $\frac{4\sqrt{3}\pi R}{3\sqrt{3}-1}$ . 54.  $\frac{(a+d)q-a}{6q^{n-1}(q-1)^2(q^n-1)} - \frac{d(n-1)}{bq^{n-1}(q-1)}$ .

1.  $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$ . 2.  $\left[ \frac{4}{3}; 5 \right]$ . 3.  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; \infty[$ . 4.  $]-\infty; \infty[$ . 5.  $]2; \infty[$ .

6.  $]-1; 1[ \cup ]3; \infty[$ . 7.  $\left[ \frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k \right]$ . 8.  $\left[ \frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k \right]$ . 9.  $[0, 2]$ .

10.  $\left[\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$ . 11.  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ . 12.  $]0; 1[ \cup ]1; \infty[$ . 13. 1.  
 14.  $] -3; -2[$ . 15. Да. 16. Нет. 17. Нет. 18. Четная.  
 19. Нечетная. 20. Четная. 21. Ни четная, ни нечетная.

22. Четная. 23. Четная. 24. Нечетная. 26.  $\pi$ . 27.  $\frac{2\pi}{3}$ . 28.  $\pi$ .

29. Непериодична. 30.  $2\pi$ . 31. Непериодична. 32.  $\pi$ . 33.  $\pi$ .  
 44. 1. 45. 8. 46. 0. 47. 4. 48. 2. 49.  $-1/2$ . 50. 0. 51.  $-1$ .  
 52. 0. 53.  $-1$ . 54.  $-1/4$ . 55.  $1/3$ . 56.  $1/3$ . 57.  $1/2$ . 58.  $-1$ .  
 59.  $1/4$ . 60. 2. 61.  $3/2$ . 62. 2. 63.  $5/3$ . 64.  $-8$ . 65.  $1/2$ . 66.  $-1$ .

67.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 68.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 69.  $\frac{\pi}{3}$ . 70.  $\frac{\pi}{4}$ . 71. 12. 72.  $-1$ . 78. 0. 79.  $a = -\frac{3}{2}$ ,  
 $b = \frac{3}{2}$ . 80.  $\frac{2}{3}$ . 81. Разрывна. 82. Нет. 83.  $x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$ , 84.  $x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{3}$ . 85.  $x = -1$ ,  $x = -2$ ,

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -\infty$ . 86.  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

87.  $x = \pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2\pi k+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-0} f(x) = +\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow 2\pi k-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+0} f(x) = -\infty$ . 88.  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ .

89.  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$ .

### § 16

1.  $4x - 3$ . 2.  $x^3 - x^2 + 4x$ . 3.  $-4x - 1$ . 4.  $4x^3 - 6x^2 - 2x + 6$ . 5.  $16(2x - 1)^7$ .  
 6.  $4(3x + 1)^3(2 - 4x)^4(-27x + 1)$ . 7.  $\frac{-2x - 1}{2x\sqrt{x}}$ . 8.  $\frac{-4}{(2x - 2)^2}$ . 9.  $\frac{x^4 + 2x}{(1 - x^3)^2}$ .  
 10.  $-\frac{3x^2}{\sqrt{2}}$ . 11.  $\frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$ . 12.  $-\frac{1}{3}(1 + x^2)^{-4/3} 2x$ . 13.  $x(a^2 - x^2)^{-3/2}$ .  
 14.  $\cos x + \sin x$ . 15.  $3 \cos 3x - 4 \sin 2x$ . 16.  $\frac{3}{2} \sin x \cdot \sin 2x$ .

17.  $\frac{-\sin 2\sqrt[3]{x}}{3x^{2/3}}$ . 18.  $\frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$ . 19.  $6 \cos(3x + 1)$ . 20.  
 $\cos \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ .

21.  $\operatorname{tg}^4 x$ . 22.  $\frac{3}{2} \sin \left[ \sin^2 \left( \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \right) \right] \sin \left( 2 \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \right) \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}}$ . 23.  $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \arcsin x$ .

24.  $-\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$ . 25.  $\frac{2x}{1 + x^4}$ . 26.  $\frac{1}{2} \frac{1}{5} (\arcsin \sqrt{x^2 - x})^{-4/5} \frac{(2x - 1)}{\sqrt{1 - x^2 + x}}$ .

27.  $\frac{2 \ln x}{x}$ . 28.  $\frac{1}{x \ln x}$ . 29.  $-\frac{2x}{x^4 - 1}$ . 30.  $\frac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \ln 3}$ .

31.  $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x\sqrt{x^2 + 1} - x^2 - 1}$ . 32.  $\frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}$ . 33.  $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$ .

34.  $\frac{2x^3 + 2x - 1}{\sqrt{x(x^2 + 1)}} e^{x^2 - \arctg x + \frac{1}{2} \ln x} - 1$ . 35.  $x^x(1 + \ln x)$ . 36.  $x^{\operatorname{ctg} x} \left( \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)$ .

37.  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$ ,  $k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$ . 38.  $\left( -\frac{\pi}{4} + \pi k \right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$

39.  $\left( -\frac{\pi}{6} + \pi k \right)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . 40.  $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \pi k, \dots$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\alpha \in ]1, 5]$ ,  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \right[$ . 41.  $a = 4$ ,  $x = \cos 8 \pm \cos 3$ .

42.  $a = -7$ ,  $a \in [2; 13]$ ,  $x = \arcsin 0,8 + (-1)^n \arcsin \frac{3 - a}{10} + \pi n$ .

43. Возрастает на  $] -\infty; 1[ \cup ] 2; +\infty[$ , убывает на  $] 1, 2[$ ,  $y_{\max}(1) = 5$ ,  
 $y_{\min}(2) = 4$ . 44.  $y$  возрастает на  $] -1; 1[$ , убывает на

$] -\infty; -1[ \cup ] 1; \infty[$ ,  $\max$  в  $x = 1$ ,  $\min$  в  $x = -1$ . 45. Возрастает на  
 $] -1; 1[$ , убывает на  $] -\infty; -1[ \cup ] 1; \infty[$ ,  $\max$  в  $x = 1$ ,  $\min$  в  $x = -1$ .

46. Возрастает на  $] 0, 1[ \cup ] e, \infty[$ , убывает на  $] 1, e[$ ,  $\min$  в  $x = e$ .

47. Возрастает на  $] 0, 1[$ , убывает на  $] 1, \infty[$ ,  $\max$  в  $x = 1$ .

48. Возрастает на  $] 0, \frac{\pi}{6}[ \cup ] \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}[ \cup ] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ , убывает на  $] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[ \cup$

$\cup \left] \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right[$ ,  $\max$  в  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\min$  в  $x = \frac{\pi}{2}$ . 49. Убывает на

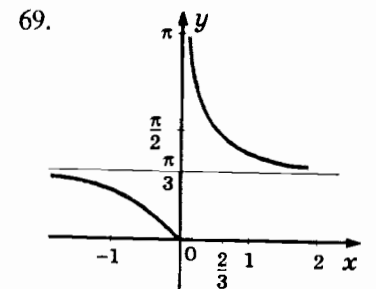
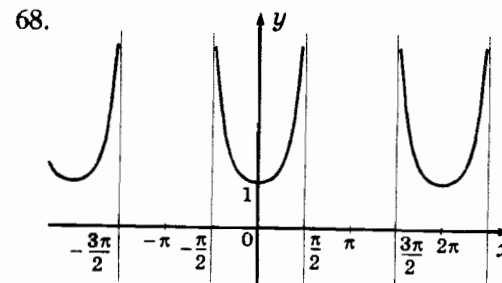
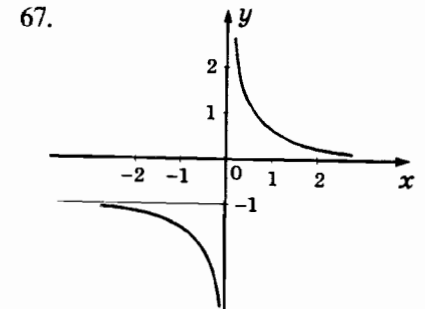
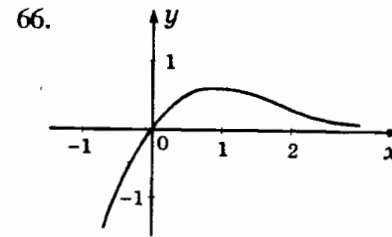
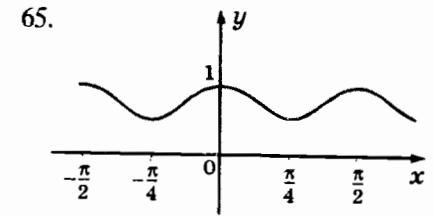
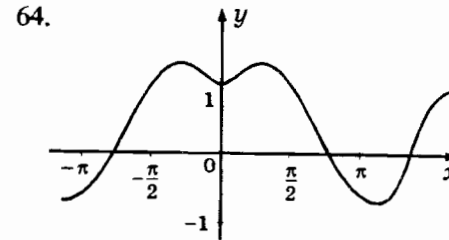
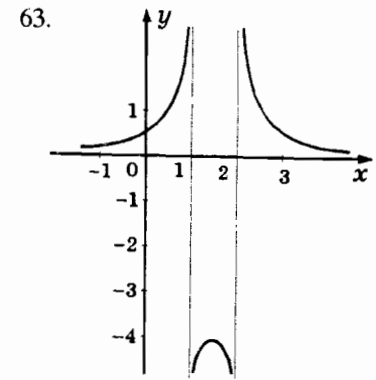
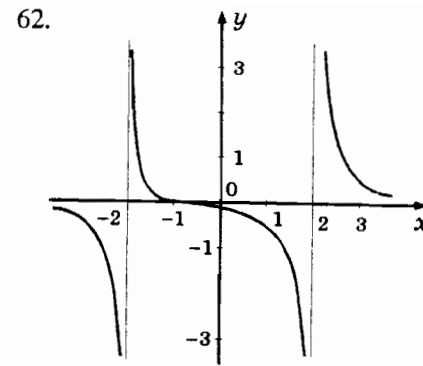
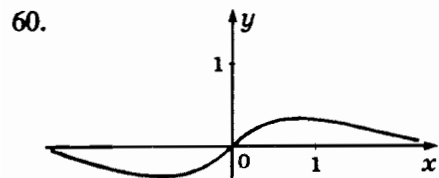
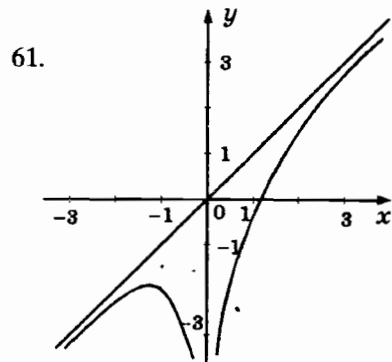
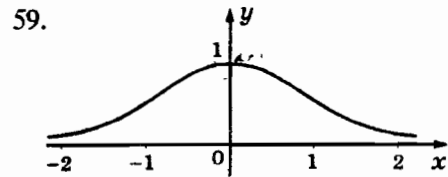
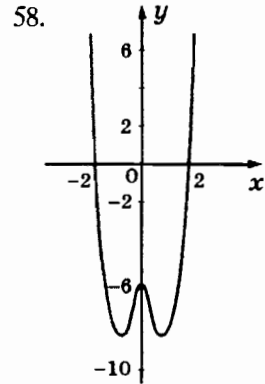
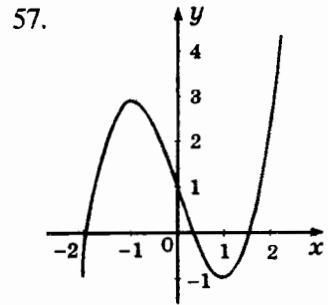
$]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[$ , возрастает на  $]0, 2[$   $\max$  в  $x = 2$ ,  $\min$  в  $x = 0$ .

50.  $y_{\min} = 0$  в  $x = 1$  и  $x = 2$ ;  $y_{\max} = 42$  в  $x = -5$ . 51.  $y_{\max} = 136$  в

$x = -3$ ;  $y_{\min} = 0$  в  $x = -1$ . 52.  $y_{\max} = -2$  в  $x = -2$ ;  $y_{\min} = -\frac{5}{2}$  в  $x = -1$ .

53.  $y_{\max} = 1$  в  $x = 0$ ,  $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  в  $x = \pm 2$ . 54.  $y_{\max} = \frac{3}{2}$  в  $x = 0$ ;  $y_{\min} = -\frac{1}{2}$

в  $x = \frac{\pi}{2}$ . 55.  $y_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $y_{\min} = 1$ . 56.  $y_{\max} = \frac{11}{3}$  в  $x = 3$ ,  $y_{\min} = 0$  в  $x = 0$ .



70.  $x + 25y = 0, x + y = 0$ . 71.  $(0, 2)$ , 72.  $(1, 0)$ ,  $(-1, -4)$ .  
 73.  $4p^3 + 27q^2 = 0$ . 74.  $\sqrt[3]{4v}$ . 75.  $H = 2R$ . 76.  $\frac{4}{3}R$ . 77.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ .

§ 17

1.  $x^4 - x^3 + x + c$ . 2.  $x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^4 + c$ . 3.  $-2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ .  
 4.  $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{5}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$ . 5.  $x - \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + c$ . 6.  $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ .  
 7.  $-\frac{9}{4}\left(2 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{4}{3}} + c$ . 8.  $\frac{1}{2}(1 + 3x)^{\frac{2}{3}} + c$ . 9.  $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$ .  
 10.  $-\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$ . 11.  $\ln(x^2 + 1) + c$ . 12.  $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + c$ .  
 13.  $-\ln|\cos x| + c$ . 14.  $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$ . 15.  $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{12}$ . 16.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 17.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
 18. 312,4. 19.  $\frac{2}{3}(7 + 3\sqrt{3})$ . 20.  $\frac{1}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 5}$ . 21. -2. 22. 2. 23. 4,5.  
 24.  $48 \ln 2 - 11\frac{1}{4}$ . 25. 13,25. 26.  $14\frac{2}{3}$ . 27. 36. 28.  $\ln 2$ . 29.  $20\frac{13}{16}$ .  
 30.  $-6 \ln(1,5) + 2,5$ . 31.  $20\frac{5}{6}$ . 32.  $\frac{12}{\ln 5} - 5$ . 33.  $\sqrt{3}; -\sqrt{9 - \sqrt{70}}$ . 34.  $-\frac{\pi}{42}$ .  
 35.  $1, \sqrt{16 - \sqrt{62}}$ . 36.  $p = 2, Q = -3, R = 110$ . 37.  $A = B, B = -4, C = 2$ .  
 38.  $\sqrt{74} - \sqrt{2}$ . 39. 0.

§ 18

1.  $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ . 2.  $x \neq 0, x \neq \pm 1$ . 3.  $]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$ . 4.  $-1 < x < 1$ .  
 5.  $x > 4$ . 6.  $]1, 5[$ . 7.  $x < 0; x \neq -n; n = 1, 2, \dots$ . 8.  $]0; 10[$ .  
 9.  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ . 10.  $]-\infty; 1[ \cup ]3; +\infty[$ . 11.  $]0; +\infty[$ . 12.  $a > 1 \rightarrow a < x < +\infty;$   
 $0 < a < 1 \rightarrow a < x < 1$ . 47.  $\frac{1}{2}$ . 48.  $\frac{1}{8}$ . 49.  $\frac{1}{2}$ . 50. -9. 51. 1.

52.  $\frac{1}{36}$ . 53.  $\lg 2$ . 54. 0. 55.  $(2 - \alpha)/(\alpha + \beta)$ . 57.  $\{2\}$ . 58.  $\{\log_3 6\}$ .  
 59.  $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ . 60.  $\emptyset$ . 61.  $\{\log_2 \log_2 5\}$ . 62.  $\{\log_5 \log_3 17\}$ .  
 63.  $\{1 + \sqrt{1 + \lg 2}; 1 - \sqrt{1 + \lg 2}\}$ . 64.  $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ . 65.  $\{-3\}$ . 66.  $\{-9, 9\}$ .  
 67.  $\{2^{-10}; 2^{10}\}$ . 68.  $0 < a \neq 1 \rightarrow \left\{\frac{1}{a^2}; \frac{1}{\sqrt{a}}\right\}$ . 69.  $\left\{-5; -2; \frac{\sqrt{89 - 7}}{2}\right\}$ . 70.  $\frac{8}{7}$ .  
 71.  $\{1\}$ . 72.  $\left\{\frac{1}{16}\right\}, x \geq 4$ . 73.  $\{0\}$ . 74.  $\{1; -2 - 2\log_3 2\}$ . 75.  $\{-4\}$ .  
 76.  $\{-3\}; x \geq -1$ . 77.  $\{(32)^{1/25}\}$ . 78.  $\{0; 1\}$ . 79.  $\{14\}$ .  
 80.  $0 < a < 1 \rightarrow \{a^{\sqrt{1-a}-1}; a^{1-\sqrt{1+3a}}\}$ . 81.  $\left\{\frac{1}{4}; (19 + \sqrt{725})\right\}$ . 82.  $\left\{\frac{1}{4}; 2^{-1/4}\right\}$ .  
 83.  $\{\sqrt{841}\}$ . 84.  $\{8\}$ . 85.  $\left\{\frac{1}{25}; 1,5\right\}$ . 86.  $\left\{\frac{1}{9}\right\}$ . 87.  $\left\{3^{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}}; 3^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}; 3\right\}$ .  
 88.  $\{625\}$ . 89.  $\{0\}$ . 90.  $\{1\}$ . 91.  $\{1; 4\}$ . 92.  $\{8\}$ . 93.  $\{\log_{27} 3\}$ .  
 94.  $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$ . 95.  $\{-2\}$ . 96.  $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$ . 97.  $\{1\}$ . 98.  $\left\{\frac{1}{3}; 9\right\}$ . 99.  $\{3\}$ .  
 100.  $\{3\}$ . 101.  $\{3/2\}$ . 102.  $\{1\}$ . 103.  $\{\operatorname{arctg} 10 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$ . 104.  $\{2; 4\}$ .  
 105.  $-3 \leq a < 0 \rightarrow \{2 + \log_3(2 - \sqrt{a+4}), 2 - \log_3(2 - \sqrt{a+4})\}$ . 106.  $\left\{\frac{2a-1}{6}\right\}$   
 при  $a \in ]-\infty; -12[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$ . 107.  $a < 1 \rightarrow \{+\log_{12}(1 + \sqrt{1-a}),$   
 $-\log_{12}(1 + \sqrt{1-a})\}; a = 1 \rightarrow \{0\}$ . 108.  $\{a^2\}$  при  $a \in ]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[ \cup ]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1[ \cup$   
 $\cup ]1; +\infty[$ . 109.  $a = 10 \rightarrow \left\{\frac{1}{10}\right\}$ ,  $10 < a < 1000 \rightarrow \left\{\frac{1}{10}; 10^{2-\sqrt{1+\lg a}}\right\}$ ,  
 $a \geq 1000 \rightarrow \left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{1000}\right\}$ . 110.  $1 < a \leq \sqrt[4]{2} \rightarrow \{a^4\}$ ,  $a > \sqrt[4]{2} \rightarrow \{a^{\sqrt{8\log_2 2 + 4 - 2}}\}$ .  
 111.  $\{(-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{-\log_2 \sqrt{a}}} + \pi n (n \in \mathbb{Z})\}$  при  $a \in ]0; 1[$ . 112.  $\{2\}$ .  
 113.  $(0 < a < 1) \cup (1 < a < 2) \cup (a = 3) \rightarrow \{a + 2\}; (2 < a < 3) \cup (a > 3) \rightarrow \{a + 2; a - 2\}$ .

114.  $(1 < a < \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2} < a < 2) \cup (a > 2) \rightarrow \{a + 1, a - 1\}; a = 2 \rightarrow \{3\}$ .  
 115.  $]-\infty; -2[$ . 116.  $]-\infty; -1[$ . 117.  $]\log_{1/3} 5; +\infty[$ . 118.  $]-\infty; 2 - \lg 3[$ .  
 119.  $]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ . 120.  $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ . 121.  $]1; +\infty[$ . 122.  $[-\infty; 1[$ .  
 123.  $(0 < a < 1) \rightarrow ]a, 1[; a > 1 \rightarrow ]1, a[$ . 124.  $]-\infty; \frac{2}{3}[ \cup ]1, +\infty[$ . 125.  $]2, 9[$ .  
 126.  $]-3, -2[ \cup ]-1, 0[$ . 127.  $]3, 5[$ . 128.  $]0, \frac{1}{4}[ \cup ]\frac{1}{2}, +\infty[$ .  
 129.  $]\frac{3}{2}; +\infty[$ . 130.  $]1, 20[$ . 131.  $]\frac{\sqrt{61} - 9}{2}; +\infty[$ . 132.  $]-\infty, 0[ \cup ]1, 6[$ .  
 133.  $]0; 10^{-4}[ \cup ]10; +\infty[$ . 134.  $]-\infty; -\frac{2}{3}[ \cup ]\frac{1}{2}; 2[$ . 135.  $]0; 1[$ .  
 136.  $]0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}[ \cup ]\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 3[$ . 137.  $]2; \frac{11}{4}[ \cup ]4; +\infty[$ . 138.  $]0, 01; +\infty[$ .  
 139.  $]-\infty; -2[ \cup ]\log_2 \frac{4}{3}; +\infty[$ . 140.  $]1000; +\infty[$ . 141.  $]\frac{1}{2}; 1[$ .  
 142.  $]0; \frac{1}{2}[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$ . 143.  $]\sqrt{6} - 1, 2[ \cup ]2, 5[$ . 144.  $]\frac{1}{2} \log_5 6; \log_6 5[$ .  
 145.  $]-\sqrt{7}; -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}; \sqrt{7}[$ . 146.  $(2)$ . 147.  $]\log_{13}^5 1[$ . 148.  $]0, 2[$ .  
 149.  $]0, 4[$ . 150.  $]-1; +1[$ . 151.  $]-\infty; -7[ \cup ]-5; -2[ \cup ]4; +\infty[$ .  
 152.  $]0; \frac{1}{2}[ \cup ]1, 2[ \cup ]3, 6[$ . 153.  $]-3; -2[ \cup ]-1; 0[ \cup ]1, 3[$ . 154.  $]0, 2^{-1/3}[ \cup ]2; +\infty[$ . 155.  $\{0\}$ . 156.  $]-\infty; -1[$ . 157.  $]-\frac{17}{9}; -\frac{5}{3}[ \cup ]7; +\infty[$ .  
 158.  $]-\infty; -3[ \cup ]0; +\infty[$ . 159.  $\begin{cases} ]0; +\infty[ \text{ при } a \in ]-\infty; 0[, \\ ](a \log_3 2)^2; \infty[ \text{ при } a \in ]0; +\infty[. \end{cases}$   
 160.  $]0; \frac{1}{2} - a - \sqrt{\frac{1}{4} - a}[ \cup ]\frac{1}{2} - a + \sqrt{\frac{1}{4} - a}, 1 - a[ \cup ]1; +\infty[$ .  
 161.  $\begin{cases} ]\frac{1}{a}, a[ \text{ при } a \in ]1; \infty[, \\ ]0; a[ \cup ]\frac{1}{a}; \infty[ \text{ при } a \in ]0; 1[. \end{cases}$  162.  $(0 < a < 1) \rightarrow ]\frac{3 - a}{2 - a}; 2[;$

$(1 < a < 2) \rightarrow ]2; \frac{3 - a}{2 - a}[; a = 2 \rightarrow ]2; +\infty[; (a > 2) \rightarrow ]-\infty; \frac{3 - a}{2 - a}[ \cup ]2; +\infty[$ .  
 163.  $]0; a^3[ \cup ]a^3; a^2[ \cup ]\frac{1}{a}; \infty[$ . 164.  $0 < a < 1 \rightarrow ]a^{\sqrt{3}}; a^{-\sqrt{3}}[;$   
 $a > 1 \rightarrow ]a^{-\sqrt{3}}; a^{\sqrt{3}}[$ . 165.  $\begin{cases} ]\frac{1}{a}; a^4[ \text{ при } a \in ]1; +\infty[, \\ ]a^4; \frac{1}{4}[ \text{ при } a \in ]0; 1[. \end{cases}$   
 166.  $0 < a < 1 \rightarrow ]-2, -\frac{1}{2}[ \cup ]-\frac{1}{2}, 0[; a > 1 \rightarrow ]-\infty; -2[ \cup ]0, 1[ \cup ]1; +\infty[$ .  
 167.  $0 < a < 1 \rightarrow ]-\sqrt{24}; 1 - \sqrt{\frac{23}{2}}[ \cup ]\sqrt{\frac{23}{2}} - 1; \sqrt{24}[; a > 1 \rightarrow ]1 - \sqrt{\frac{23}{2}}; \sqrt{\frac{23}{2}} - 1[$ .  
 168.  $0 < a < \frac{1}{2} \rightarrow ]1 - \sqrt{1 - a}; 1 + \sqrt{1 - a}[; \frac{1}{2} < a \leq 1 \rightarrow ]1 - \sqrt{1 + a}; 1 + \sqrt{1 - a}[ \cup ]1 + \sqrt{1 - a}; 1 + \sqrt{1 + 0}[; a > 1 \rightarrow ]1 - \sqrt{1 + a}; 1 + \sqrt{1 + a}[$ .  
 169.  $a < 0 \rightarrow ]1; \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}[; 0 < a \leq \frac{1}{4} \rightarrow ]a; \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}[ \cup ]\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}; 1[;$   
 $\frac{1}{4} < a < 1 \rightarrow ]a; 1[$ . 170.  $\left\{ \left( \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$ . 171.  $\{(5, 3)\}$ . 172.  $\{(2, 5)\}$ .  
 173.  $\{(2, 1)\}$ . 174.  $\left\{ \left( \left( \frac{9}{5} \right)^{1/5}; \frac{5}{2 - \log_3 5} - 2 \right) \right\}$ . 175.  $\{(4, 32); (-1, 1)\}$ .  
 176.  $\left\{ \left( |a|^{\frac{66}{5}}; |a|^{-\frac{12}{5}} \right); a \neq 0; a \neq \pm 1 \right\}$ . 177.  $\left\{ \left( \frac{a - 1}{a - 2}; a - 1 \right) \text{ при } a > 2 \right\}$ .  
 178.  $0 < a \neq 1 \rightarrow \{(a^{1 - 4a}; a^{2a})\}$ .

При остальных вещественных значениях параметра  $a$  в задачах с параметром решений нет.



## СОДЕРЖАНИЕ

|   | Задачи | Ответы<br>и решения |
|---|--------|---------------------|
| §1. Тожественные преобразования алгебраических выражений . . . . .          | 3      | 68                  |
| §2. Действительные числа . . . . .  | 9      | 70                  |
| §3. Числовые неравенства и их свойства . . . . .                            | 10     | —                   |
| §4. Комплексные числа . . . . .   | 12     | 71                  |
| §5. Графики простейших алгебраических функций . . . . .                     | 14     | —                   |
| §6. Метод математической индукции . . . . .                                 | 15     | —                   |
| §7. Свойства многочленов. Теорема Безу. Теорема Виета . . . . .             | 16     | 73                  |
| §8. Линейные и квадратные уравнения.<br>Уравнения высших степеней . . . . . | 19     | 73                  |
| §9. Системы рациональных уравнений . . . . .                                | 21     | 76                  |
| §10. Линейные и нелинейные неравенства . . . . .                            | 24     | 78                  |
| §11. Иррациональные уравнения, системы уравнений<br>и неравенств . . . . .  | 27     | 79                  |
| §12. Задачи на составление уравнений . . . . .                              | 29     | 81                  |
| §13. Числовые последовательности . . . . .                                  | 43     | 83                  |
| §14. Прогрессии . . . . .   | 51     | 85                  |
| §15. Общие свойства функций. Предел функций.<br>Непрерывность . . . . .     | 55     | 85                  |
| §16. Производная. Исследование функций с помощью<br>производной . . . . .   | 58     | 86                  |
| §17. Первообразная и интеграл . . . . .                                     | 61     | 90                  |
| §18. Логарифмические и показательные уравнения<br>и неравенства . . . . .   | 63     | 90                  |