Федеральное агентство по образованию

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Т.А. Пыжова, Г.В. Лупенко, И.А. Масленникова

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие
для преподавателей математики,
работающих в седьмых классах
(с углубленным изучением математики)

Москва 2009

УДК 51(07)
ББК 22.1я7
П94

Пыжова Т.А., Лупенко Г.В., Масленникова И.А. **Математика:** *Методическое пособие для преподавателей математики, работающих в седьмых классах (с углубленным изучением математики).* М.: МИФИ, 2009. – 56 с.

Даны примеры задач по алгебре и геометрии для седьмого класса. Задачи систематизированы по темам и снабжены ответами.

Пособие предназначено учителям, преподающим в вечерних физико-математических лицеях при МИФИ.

Авторы:

Пыжова Т.А., кандидат технических наук, доцент МИФИ, почетный работник «Высшего образования РФ».

Лупенко Г.В., кандидат физико-математических наук, доцент МИФИ, соросовский учитель, почетный работник «Высшего образования РФ».

Масленникова И.А., соросовский учитель, заслуженный учитель РФ.

Рецензент   канд. физ.-мат. наук А.Н. Рурукин

ISBN 978-5-7262-1050-6

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

Раздел 1. Арифметические примеры

Перед началом проведения семинарских занятий по теме «Арифметические примеры» необходимо повторить основные правила арифметических действий и порядок их выполнения.

Особо следует обратить внимание на выполнение действий с дробями. Необходимо показать, в каких случаях и каким образом числа приводятся к общему знаменателю, как раскладывать числа на простые множители. Недопустимо использование учащимися калькуляторов, мобильных телефонов и другой вычислительной техники. Также следует объяснить, как производятся арифметические действия со смешанными числами и неправильными дробями.

Пример 1.

$$3\frac{1}{2}+5\frac{1}{6}=3\frac{3}{6}+5\frac{1}{6}=8\frac{4}{6}=8\frac{2}{3}.$$

Пример 2.

$$3\frac{2}{3}-5\frac{1}{3}=-(5\frac{1}{3}-3\frac{2}{3})=-(4\frac{4}{3}-3\frac{2}{3})=-1\frac{2}{3}.$$

Пример 3.

$$2{,}87:1{,}4.$$

Запишем деление «углом»:

$$\begin{array}{r|l} 2{,}87 & \quad 1{,}4 \quad \\ \cline{2-2} & \\ \end{array}$$

Данная запись эквивалентна:

$$\begin{array}{r|l} -\,28{,}70 & 14 \\ \underline{28} & \overline{2{,}05} \\ -\,70 & \\ \underline{70} & \\ 0 & \end{array}$$

Пример 4.

$$\frac{\frac{1}{8}:\frac{5}{16}+2{,}25\cdot 0{,}8}{\left(2\frac{1}{48}-1\frac{55}{72}\right):3\frac{1}{12}}+3\frac{3}{5}.$$

Выполним примеры по действиям:

1) $\frac{1}{8}:\frac{5}{16}=\frac{1\cdot 16}{8\cdot 5}=\frac{2}{5}=0{,}4$;

2) $2{,}25\cdot 0{,}8=1{,}8$;

3) $0{,}4+1{,}8=2{,}2$;

4) $2\frac{1}{48}-1\frac{55}{72}=2\frac{3}{144}-1\frac{110}{144}=1\frac{147}{144}-1\frac{110}{144}=\frac{37}{144}$;

5) $\frac{37}{144}:3\frac{1}{12}=\frac{37\cdot 12}{144\cdot 37}=\frac{1}{12}$;

6) $2{,}2:\frac{1}{12}=\frac{22\cdot 12}{10\cdot 1}=\frac{132}{5}=26\frac{2}{5}$;

7) $26\frac{2}{5}+3\frac{3}{5}=30$.

Ответ: 30.

Пример 5. Вычислить рациональным или наиболее удобным способом без использования калькулятора.

$$(0{,}014\cdot 1\frac{2}{3}-0{,}286:(-0{,}6)):(-0{,}025)=$$

$$=(0{,}014\cdot 1\frac{2}{3}+0{,}286\cdot 1\frac{2}{3}):(-0{,}025)=$$

$$=1\frac{2}{3}(0{,}014+0{,}286):(-0{,}025)=1\frac{2}{3}\cdot 0{,}3:(-0{,}025)=$$

$$=-\frac{5\cdot 3\cdot 1000}{3\cdot 10\cdot 25}=-20.$$

Ответ: –20.

Раздел 2. Признаки делимости

При изучении этого раздела следует повторить известные признаки делимости: на 2; 3; 5; 9; 10, а также разобрать недостающие признаки на 4, 8, 11, 25. Признаки делимости на 7 и 13 относятся к более старшим классам.

Признаки делимости необходимы при разложении на простые множители, а также при нахождении неизвестного числа с заданными свойствами.

Пример 1. Определить, делятся ли числа 1892 и 5280 на 11?

У первого числа разность суммы цифр, стоящих на четных и нечетных местах, равна (1 + 9) – (8 + 2) = 0. Следовательно, число 1892 делится на 11. У второго числа (5 + 8) – – (2 + 0) = 11. Это число тоже делится на 11. Следовательно, число 5280 делится на 11.

Пример 2. Определить число десятков в числе 17383*6, если известно, что оно делится на 8.

По признаку делимости на «8» число 3*6 (три последние цифры), должно делиться на 8. Это возможно, если вместо * подставить цифры 3 или 7.

Раздел 3. Проценты

Так как тема «Проценты» изучается в 6 классе, необходимо повторить нахождение процента от числа и нахождение числа по известному проценту.

На семинаре следует показать способ вычисления сложного процента.

Пример 1. По вкладам начисляется ежегодно 2% от вклада. В банк внесли 150 руб. Какой станет сумма вклада через 2 года?

Исходная сумма	Доход за год, руб.	Сумма на вкладе в конце года, руб.	Год вклада
150	$\frac{150 \cdot 2}{100}$	$150 + 150 \cdot 0{,}02 =$ $= 150 \cdot 1{,}02$	1
$150 \cdot 1{,}02$	$\frac{150 \cdot 1{,}02 \cdot 2}{100}$	$150 \cdot 1{,}02 + 150 \cdot 1{,}02 \cdot 0{,}02 =$ $= 150 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 156{,}06$	2

Ответ: 156 руб. 6 коп. получил вкладчик банка через 2 года.

Раздел 4. Пропорции

При решении задач и примеров на пропорции необходимо повторить основное свойство пропорции: в верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Показать ученикам наиболее рациональный способ нахождения неизвестного.

Пример 1.

$$\frac{1}{2} : 7\frac{3}{7} = x : 4\frac{20}{21};$$

$$7\frac{3}{7}x=\frac{1}{2}\cdot 4\frac{20}{21};$$

$$x=\frac{1}{2}\cdot 4\frac{20}{21}:7\frac{3}{7};$$

$$x=\frac{1\cdot 104\cdot 7}{2\cdot 21\cdot 52};\ x=\ \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{3}$.

Раздел 5. Уравнения

При классификации уравнений авторами была предложена группировка примеров по типам, обладающим одинаковыми методами решения. Терминология типов уравнений не является общепринятой, но удобна для преподавания учащимся. Считаем не целесообразным давать в 7-м классе методы решений квадратных уравнений через дискриминант, так как это является материалом 8-го класса.

Уравнения первого типа (наиболее простое). После раскрытия скобок переносятся члены, содержащие неизвестные, в одну сторону, а известные – в другую сторону равенства. Проводится приведение подобных членов, а затем находится корень уравнения.

Уравнения второго типа (преобразование уравнений и разложение на множители; применение формул сокращенного умножения). Основной идеей решения уравнений данного типа является использование математического свойства: произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю.

Для использования этого свойства необходимо сначала преобразовать исходное уравнение в произведение сомножителей, которое равно нулю.

При разборе уравнений данного типа необходимо обратить внимание учащихся на то, что деление левой и правой части уравнения на одинаковый множитель, содержащий неизвестное, приводит в большинстве случаев к потере корня.

Метод решения уравнения данного типа заключается в переносе всех членов уравнения в одну сторону, а затем преобразование этого выражения в произведение. После этого каждый множитель приравнивается нулю и находится соответствующий корень.

Пример 1.

$$(x^2-2x)(3x+1)=0;$$
$$x(x-2)(3x+1)=0.$$

1) $x_1=0;$

2) $x-2=0;$

$x_2=2;$

3) $3x+1=0;$

$x_3=-\frac{1}{3}.$

Ответ: $x_1=0;$ $x_2=2;$ $x_3=-\frac{1}{3}.$

Пример 2.

$$(3x-2)(5x+3)=3x-2\ ;$$
$$(3x-2)(5x+3)-(3x-2)=0\ ;$$
$$(3x-2)(5x+3-1)=0\ ;$$
$$(3x-2)(5x+2)=0\ ;$$

1) $3x-2=0;$

$3x=2;$

$x_1=\frac{2}{3};$

2) $5x+2=0;$

$5x=-2;$

$x_2=-\frac{2}{5}.$

Ответ: $x_1=\frac{2}{3};$ $x_2=-\frac{2}{5}.$

Пример 3.

$$(5x-1)(3x+7)-(2-10x)=(x-3)(5x-1)\ ;$$
$$(5x-1)(3x+7)-(2-10x)-(x-3)(5x-1)=0\ ;$$
$$(5x-1)(3x+7)+2(5x-1)-(x-3)(5x-1)=0\ ;$$

$(5x-1)\left[(3x+7)+2-(x-3)\right]=0$;

$(5x-1)\left[3x+7+2-x+3\right]=0$;

1) $5x-1=0;$ 2) $2x+12=0;$

$5x=1;$ $\qquad 2x=-12;$

$x_1=\dfrac{1}{5};$ $\qquad x_2=-6.$

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{5};\ \ x_2=-6.$

Пример 4.

$(2x-3)(7x-3)-(3-2x)^2=(x+1)(2x-3)$;

$(2x-3)(7x-3)-(3-2x)^2-(x+1)(2x-3)=0$;

$(2x-3)\left[(7x-3)-(2x-3)-(x+1)\right]=0$;

$(2x-3)\left[7x-3-2x+3-x-1\right]=0$;

$(2x-3)(4x-1)=0$;

1) $2x-3=0;$ $\qquad$ 2) $4x-1=0;$

$2x=3;$ $\qquad 4x=1;$

$x_1=1{,}5;$ $\qquad x_2=\dfrac{1}{4}.$

Ответ: $x_1=1{,}5;$ $x_2=\dfrac{1}{4}.$

Пример 5.

$2x^2-18=(5x+15)(x+1)$;

$2\left(x^2-9\right)-5(x+3)(x+1)=0$;

$2\left(x-3\right)\left(x+3\right)-5(x+3)(x+1)=0$;

$(x+3)\left[2\left(x-3\right)-5\left(x+1\right)\right]=0$;

$(x+3)\left[2x-6-5x-5\right]=0$;

$(x+3)(-3x-11)=0$;

1) $x+3=0;$ $\qquad$ 2) $-3x-11=0;$

$x_1=-3;$ $\qquad 3x=-11;$

$x_2=-3\dfrac{2}{3}.$

Ответ: $x_1=-3;$ $x_2=-3\dfrac{2}{3}.$

Уравнения третьего типа (приведение уравнений к общему знаменателю).

Отличительной чертой уравнения данного типа является наличие различных числовых знаменателей у большинства членов. После домножения уравнения на НОК (наименьшее общее кратное) чисел, образующих знаменатели, уравнение преобразуется в ранее рассмотренные типы.

Пример 1.

$$\frac{5x-1}{3}=\frac{2x-3}{5}-1;$$

$$\frac{5x-1}{3}-\frac{2x-3}{5}+1=0\,\Big|\cdot 15;$$

$$5(5x-1)-3(2x-3)+15=0;$$

$$25x-5-6x+9+15=0;$$

$$19x+19=0;$$

$$19x=-19;$$

$$x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

Пример 2.

$$(x-7)\left(\frac{2x-1}{6}-\frac{x+1}{3}\right)=x(x-7);$$

$$(x-7)\left(\frac{2x-1}{6}-\frac{x+1}{3}\right)-x(x-7)=0;$$

$$(x-7)\left(\frac{2x-1}{6}-\frac{x+1}{3}-x\right)=0;$$

1) $x-7=0$;

$x_1=7$;

2) $\frac{2x-1}{6}-\frac{x+1}{3}-x=0\,\Big|\cdot 6$;

$2x-1-2(x+1)-6x=0$;

$2x-1-2x-2-6x=0$;

$-6x-3=0$;

$6x=-3$;

$x=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x_1=7; x_2=-\dfrac{1}{2}$.

Уравнение четвертого типа (уравнение, содержащее модуль).

Понятие модуля алгебраического выражения уже известно ученикам 7-го класса, хотя, как правило, задачи, содержащие модуль, в школьной программе рассматриваются редко. Поэтому при разборе подобных задач необходимо повторить с учащимися определение модуля и правило его раскрытия. Так как решение неравенств относится к материалу 8-го класса, то учителю приходится объяснять адаптированно к 7-му классу (оставлять или переносить член с неизвестным в ту сторону неравенства, чтобы он был положительным, а затем определять, какие значения может принимать неизвестное).

Поскольку $|x|$ больше или равен нулю, а значение x может быть как положительным, так и отрицательным, то следует обратить внимание учащихся на то, что минус x может быть положительным при отрицательном значении x.

Существуют два способа решения уравнений с модулем, которые рассмотрены далее на примерах.

Введение понятия модуля в 7-м классе способствует развитию математического мышления учеников и облегчает изучение этого материала в более старших классах.

Пример 1.

$$3\cdot|2x|=9;$$

$$|2x|=3.$$

Существуют два способа решений.

1 способ:

$|2x|=3$.

1) $2x \geq 0;$ 2) $2x < 0;$

$2x = 3;$ $-2x = 3;$

$x = 1,5;$ $x = -1,5.$

Проверка: Проверка:

$|2 \cdot 1,5| = 3;$ $|2 \cdot (-1,5)| = 3;$

$3 = 3.$ $3 = 3.$

Ответ: $x_1 = 1,5; x_2 = -1,5$.

2 способ:

$|2x| = 3$.

1) $2x \geq 0;$

$x \geq 0;$

$2x = 3;$

$x_1 = 1,5.$

Удовлетворяет условию $x \geq 0$.

2) $2x < 0;$

$x < 0;$

$-2x = 3;$

$x_2 = -1,5.$

Удовлетворяет условию $x < 0$.

Ответ: $x_1 = 1,5; x_2 = -1,5$.

Пример 2.

$$|x - 3| = 2x + 1.$$

Существуют два способа решений:

1 способ:

1) $x - 3 \geq 0;$

$x - 3 = 2x + 1;$

$-x = 4;$

$x = -4$

(не удовлетворяет условию $x - 3 \geq 0$).

2) $x - 3 < 0;$

$-(x - 3) = 2x + 1;$

$-x + 3 = 2x + 1;$

$-3x = -2;$

$x = \frac{2}{3}.$

Проверка:

$$|-4-3| = 2(-4)+1;$$
$$|-7| = -8+1;$$
$$7 \neq -7.$$

Проверка:

$$\left|\frac{2}{3}-3\right| = 2\cdot\frac{2}{3}+1;$$
$$\left|-2\frac{1}{3}\right| = 1\frac{1}{3}+1;$$
$$2\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

2 способ:

1) $x-3 \geq 0;$
$x \geq 3;$
$x-3 = 2x+1;$
$-x = 4;$
$x = -4$ (не удовлетворяет условию $x \geq 3$).

2) $x-3<0;$
$x<3;$
$-(x-3) = 2x+1;$
$-x+3 = 2x+1;$
$-3x = -2;$
$x = \dfrac{2}{3}$ при $x<3$.

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

Пятый тип уравнения (уравнения в целых числах). Уравнения, при решении которых вводится дополнительное условие «неизвестные являются целыми числами», представляют собой достаточно большой раздел в математике.

В 7-м классе можно разобрать с учащимися только наиболее простые уравнения из этого раздела. Основная идея решения этих уравнений заключается в преобразовании выражения к виду, записанному произведением множителей, содержащих неизвестное с одной стороны равенства и число, которое может раскладываться на простые целочисленные делители, с другой стороны. Желательно, чтобы число, стоящее в правой части преобразованного уравнения, имело небольшое количество множителей (с учетом отрицательных значений). В противном случае, сложность задачи возрастает. Затем следует перебрать все возможные варианты равенства множителей левой и правой части. После решения простейших уравнений в ответ идут только целочисленные пары x и y.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение

$$5xy - 2y - 2 = 3 - y + 3xy.$$

В уравнении приведем подобные слагаемые и преобразуем уравнение к требуемому виду

$$5xy - 3xy - 2y + y = 5;$$

$$2xy - y = 5;$$

$$y(2x - 1) = 5;$$

$(2x-1)$ – целое число при целых значениях x. Число 5 можно представить в виде произведение множителей $5 \cdot 1$ или $(-5) \cdot (-1)$.

Рассмотрим возможные варианты:

1) $y_1 = 1;$	2) $y_2 = 5;$	3) $y_3 = -1;$	4) $y_4 = -5;$
$2x - 1 = 5;$	$2x - 1 = 1;$	$2x - 1 = -5;$	$2x - 1 = -1;$
$2x = 6;$	$2x = 2;$	$2x = -4;$	$2x = 0;$
$x_1 = 3;$	$x_2 = 1;$	$x_3 = -2;$	$x_4 = 0.$

Во всех случаях корни уравнения целочисленные.

Ответ: $x_1 = 3;\quad y_1 = 1;\quad x_3 = -2;\quad y_3 = -1;$

$x_2 = 1;\quad y_2 = 5;\quad x_4 = 0;\quad y_4 = -5.$

Шестой тип уравнений (уравнения с параметрами). Уравнение, содержащее кроме цифр и неизвестного еще величину, обозначенную буквой, будем называть уравнением с параметром.

Для решения уравнений такого типа необходимо сначала найти неизвестное, считая параметр (букву) как некоторое число, а затем исследовать полученный результат на наличие решений в зависимости от параметра. Методы решения заданий такого типа достаточно разнообразны: либо проводится перебор всех возможных вариантов, либо используются графические представления, а затем проводится анализ полученных графиков. В данном пособии рассмотрены простейшие варианты уравнений с параметрами.

Пример 1. Определить, при каких значениях неизвестного (параметра) *a* уравнение имеет, а при каких не имеет решения.

$$\left.\frac{ax-3}{2}=\frac{5-x}{4}\right|\cdot 4;$$

$$2ax-6=5-x;$$

$$2ax+x=11;$$

$$x(2a+1)=11. \qquad 1)\ x=\frac{11}{2a+1}; \quad 2a-1\neq 0;\ 2a\neq -1;\ a\neq -\frac{1}{2};$$

$$2)\ 2a+1=0; \quad a=-\frac{1}{2},$$ нет решения.

Ответ: при $a\neq -\frac{1}{2}$, $x=\frac{11}{2a+1}$;

при $a=-\frac{1}{2}$ нет решения.

Пример 2. Определить, при каких значениях неизвестного (параметра) *a* уравнение имеет решение.

$$6a^2y-7ay=27+2ay;$$

$$6a^2y-7ay-2ay=27;$$

$$6a^2y-9ay=27;$$

$$3ay(2a-3)=27; \qquad y=\frac{27}{3a(2a-3)}=\frac{9}{a(2a-3)};$$

$$a(2a-3)\neq 0;$$
$$a_1\neq 0;$$
$$2a-3\neq 0;$$
$$a_2\neq 1{,}5.$$

Ответ: при $a_1\neq 0,\ a_2\neq 1{,}5$, $y=\dfrac{9}{a(2a-3)}$.

Пример 3. Определить, при каких значениях неизвестного (параметра) a уравнение

$$7(2ax+3)-a=6(a+x)+18$$

имеет бесконечно много решений.

$14ax+21-a=6a+6x+18$;

$14ax-6x=6a+a-21+18$;

$2x(7a-3)=7a-3$;

Если $7a-3=0$, $a=\dfrac{3}{7}$, уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: при $a=\dfrac{3}{7}$ бесчисленное множество решений.

Раздел 6. Текстовые задачи

Спецификой решения текстовых задач является составление алгоритма решения, т.е. перевод текстового условия в уравнение или систему уравнений.

При решении задач необходимо приучить учащихся вводить переменные и правильно их описывать. При составлении уравнения или уравнений необходимо комментировать выполняемые действия и условия составления уравнения. Принцип очевидности, распространенный среди учащихся, недопустим.

Не следует путать оформление задач на движение в физике и математике. Запись типа $V = x$ и $t = y$ в математике не должна быть использована.

После решения уравнения или системы необходимо проанализировать полученные результаты на соответствие условию задачи и поставленному вопросу.

Ответ задачи записывается в форме развернутого ответа на поставленный вопрос. Ответ в математике дается точным значением без приближения.

Допустимо составление уравнений при решении задач с помощью таблиц.

В задачнике приведены типичные задачи, которые должен уметь решать ученик 7-го класса.

Задача 1. *По течению реки катер прошел за 7 ч столько же километров, сколько он проходит за 8 ч против течения. Собственная скорость катера 30 км/ч. Найти скорость течения реки.*

Решение. Пусть x [км/ч] – скорость течения реки; $30 + x$ [км/ч] – скорость катера по течению; $30 - x$ [км/ч] – скорость катера против течения; $7(30 + x)$ [км] – расстояние, пройденное катером по течению; $8(30 - x)$ [км] – расстояние, пройденное катером против течения.

Так как по условию задачи расстояния, пройденные по течению реки и против, равны, то составим уравнение:

$$7(30+x) = 8(30-x)\,.$$

Решим уравнение.

$$210 + 7x = 240 - 8x\,;$$

$$7x + 8x = 240 - 210\,;$$

$$15x = 30\,;$$

$$x = 2\,.$$

Ответ: скорость течения реки 2 км/ч.

Задача 2. *В первом мешке было 50 кг картошки, а во втором – 80 кг. Из второго мешка взяли картошки в 3 раза больше, чем из* *первого, и тогда в первом мешке картошки осталось вдвое больше, чем во втором. Сколько килограммов картошки взяли из каждого мешка?*

Решение. Пусть x [кг] – количество картошки, которое взяли из первого мешка; $3x$ [кг] – количество картошки, которое взяли из второго мешка; $(50 - x)$ [кг] – количество картошки, которое осталось в первом мешке после взятия; $(80 - 3x)$ [кг] – количество картошки, которое осталось во втором мешке после взятия.

По условию задачи, после взятия картошки из первого мешка там осталось вдвое больше, чем во втором мешке. Составим уравнение:

$$50 - x = 2(80 - 3x).$$

Решим уравнение.

$50 - x = 160 - 6x$;

$-x + 6x = 160 - 50$;

$5x = 110$;

$x = 22$ кг;

$3x = 3 \cdot 22 = 66$ кг.

Ответ: из первого мешка взяли 22 кг картошки, а из второго – 66 кг.

Раздел 7. Степени

Изучение материала этого раздела может быть перенесено на более позднее время, если соответствующий раздел школьного учебника не пройден.

Преподавателю следует в начале семинара дать основные свойства степеней и показать на простых примерах их применение. В программу можно включить дополнительное свойство $a^0 = 1$, которое проходится в 8-м классе, однако учащиеся 7-х классов легко его понимают, так как $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$, и безошибочно применяют его на практике.

При выполнении сложных примеров со степенями необходимо выделить члены с одинаковыми основаниями и преобразовать их. Если при преобразовании показатель степени числителя меньше показателя степени знаменателя, то показатель степени знаменателя разбивается на два слагаемых, один из которых совпадает со значением показателя степени числителя. После этого производится сокращение дроби.

Пример 1. Вычислить:

$$\frac{16 \cdot 2^3 \cdot 75}{3 \cdot 5^2 \cdot 2^5} = \frac{2^4 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 2^5} = \frac{2^7}{2^5} = 2^2 = 4\,.$$

Пример 2. Упростить:

$$\frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot d^7 \cdot \left[\left(\frac{c}{d}\right)^3\right]^5 \cdot \left[\left(\frac{ab}{c}\right)^3\right]^2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^2 \cdot (d^2)^3}{\frac{ab}{c} \cdot a \cdot \left[\left(\frac{c}{d}\right)^2\right]^2 \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^5 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^7 \cdot (ab)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot d^7 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{15} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^6 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^2 \cdot d^6}{\left(\frac{ab}{c}\right) \cdot a \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^4 \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^5 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^7 \cdot (ab)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^8 \cdot d^{13} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{17}}{\left(\frac{ab}{c}\right)^6 \cdot a \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{11} \cdot (ab)^2} = \frac{\left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot d^{13} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^6}{a \cdot (ab)^2} =$$

$$= \frac{(ab)^2 \cdot d^{13} \cdot c^6}{c^2 \cdot d^6 \cdot a(ab)^2} = \frac{c^4 d^7}{a}.$$

Пример 3. Вычислить:

$$\frac{360^n \cdot 25}{5^{n+2} \cdot 3^{2n-1} \cdot 2^{3n-2}} = \frac{3^{2n} \cdot 2^{3n} \cdot 5^{n+2}}{5^{n+2} \cdot 3^{2n-1} \cdot 2^{3n-2}} =$$
$$= 3^{2n-(2n-1)} \cdot 2^{3n-(3n-2)} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Раздел 8. Одночлены, многочлены. Разложение многочленов на множители

В начале семинара надо дать определение одночлена и многочлена, а также показать, как записываются одночлен и многочлен в стандартном виде. Затем следует повторить (или изучить) формулы сокращенного умножения. Далее с учащимися следует отработать действия с одночленами и многочленами, особое внимание необходимо обратить на знаки, которые получаются после раскрытия скобок, перед которыми стоит отрицательный множитель.

Большие трудности при решении вызывают примеры, в которых необходимо вынести знак минуса из скобки. Особенно, если скобка имеет четную степень.

При разложении многочленов на множители иногда приходится группировать ряд членов и с помощью формул сокращенного умножения получать более компактное выражение, которое впоследствии дает возможность вынести общий множитель за скобки.

Научить видеть в многочлене формулы сокращенного умножения – основная задача преподавателя.

Пример 1. Разложить на множители:

$$x^2 + 4xy - 2x - 4y + 4y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y =$$
$$= (x + 2y)^2 - 2(x + 2y) = (x + 2y) \cdot (x + 2y - 2).$$

Пример 2. Разложить на множители:

$$9 - a^2 - 2ab - b^2 = 9 - (a^2 + 2ab + b^2) = 9 - (a + b)^2 =$$
$$= 3^2 - (a + b)^2 = (3 - a - b)(3 + a + b).$$

Пример 3. Разложить на множители:

$$b^3 + 2ab^2 - 3a^2b = b^3 + 3ab^2 - ab^2 - 3a^2b =$$
$$= b^2(b + 3a) - ab(b + 3a) = b(b - a)(b + 3a).$$

Пример 4. Разложить на множители:

$$6a^2 - 5a - 4 = 6a^2 - 8a + 3a - 4 = 2a(3a - 4) + (3a - 4) =$$
$$= (3a - 4)(2a + 1).$$

Пример 5. Разложить на множители:

$$(3 + x^2)^2 - (7 + x^2)^2 = (3 + x^2 - 7 - x^2)(3 + x^2 + 7 + x^2) =$$
$$= -4(2x^2 + 10) = -8(x^2 + 5).$$

Раздел 9. Понятие о функции и графике функции

Зависимость между переменными y и x называют функциональной зависимостью (или функцией) и обозначают $y(x)$. При этом x называют независимой переменной, а y – зависимой переменной.

Функция может быть задана с помощью формулы, таблицы или графика. Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Графиком функции $y = kx$ при любом значении k является прямая, проходящая через начало координат, если значения x, y положительны и $k > 0$, то зависимость вида $y = kx$ называют прямой пропорциональной зависимостью, а k – коэффициентом пропорциональности.

Кроме прямой пропорциональной зависимости существует обратная пропорциональная зависимость y от x. В этом случае при увеличении значения x в несколько раз значение y уменьшается во столько же раз. Обратная пропорциональная зависимость выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$.

Функция вида $y = kx + b$, где b и k – заданные числа, называется линейной. Графиком линейной функции является прямая. Линейная функция строится по двум точкам или путем сдвига графика $y = kx$ на b единиц вдоль оси ординат.

Для исследования линейной функции удобно находить точки пересечения графика с осями координат.

Преподавателю следует отметить, что для построения графика линейной функции необходимы лишь две точки (согласно аксиоме геометрии), все остальные точки являются контрольными.

При построении графиков линейных функция точки пересечения с осями координат и другими линейными графиками являются приблизительными и требуют дополнительного вычисления или проверки.

В некоторых учебниках кроме линейной функции даются элементарные зависимости обратной пропорции и квадратичной функции. Считаем целесообразным детальное изучение этих функций отнести в 8 класс.

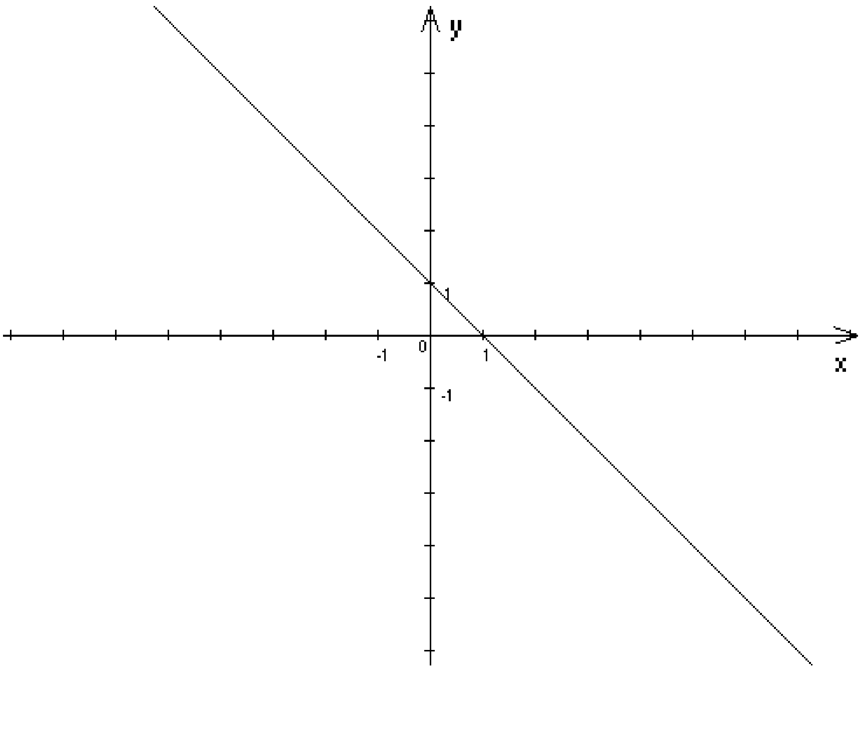
Исследование функции с помощью графика является удобным и наглядным. Надо обратить внимание учащихся на то, как найти нуль функции и какие значения должен иметь аргумент, чтобы функция была положительной или отрицательной.

При оформлении графика стрелками указываются положительные направления осей, которые подписываются. На осях указывается начало координат и выбранный масштаб каждой из осей (не следует перегружать график избыточным количеством чисел на осях). На графике необходимо отметить точки его построения и точки пересечения с осями. График должен быть подписан (допускается при построении единственного графика не подписывать его, однако, когда количество графиков два и более, необходимо подписывать каждый график).

Пример 1.

$$y = -x + 1\,;$$

x	0	2
y	1	–1



Раздел 10. Системы уравнений

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называют такую пару чисел x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство. Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или установить, что их нет. Существуют три способа решения системы уравнений: подстановки, сложения и графический.

При решении способом подстановки необходимо:

- из одного уравнения системы (все равно из какого) выразить одно неизвестное через другое, например, y через x;
- полученное выражение подставить в другое уравнение системы и получить одно уравнение с одним неизвестным;
- решив это уравнение, найти x;
- подставив найденное значение x в выражение для y, найти значение y.

При решении системы уравнений способом алгебраического сложения необходимо:

- уравнять значения числовых коэффициентов при одном из неизвестных, умножая или деля каждое из уравнений на необходимые числа;
- складывая или вычитая полученные уравнения, получить одно уравнение с одним неизвестным;
- найти первое неизвестное;
- подставляя найденное значение в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

При решении системы уравнений графическим способом необходимо:

- построить графики каждого из уравнений системы;
- найти координаты точки или точек пересечения построенных прямых или установить, что прямые не пересекаются;
- если прямые параллельны, то система решений не имеет;
- если прямые совпадают, то система имеет бесконечное множество решений;
- если прямые имеют одну общую точку, то ее координаты являются решением системы уравнений.

При решении графическим методом находится приближенное решение. Чтобы найти точное решение системы уравнений, необходима проверка.

Системы уравнений, предлагаемые для разбора на семинарах, условно разбиты на три типа: первый тип – простейшие системы линейных уравнений; второй тип – уравнения, требующие предварительных преобразований; третий тип – уравнения, в которых используются формулы сокращенного умножения и групповая замена.

Первые два типа систем уравнений достаточно подробно описаны в школьном учебнике, поэтому не требует комментариев. Ниже рассмотрим решение систем уравнений третьего типа.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 5x - y; \\ x - 2y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2y)^2 = 5x - y; \\ x - 2y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^2 = 5x - y; \\ 2 = x - 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 4; \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

ГЕОМЕТРИЯ

Проведение семинарских занятий по геометрии планируется начать с 12-й недели по одному часу.

Поскольку в настоящее время существует несколько учебников, по которым учителя могут проводить занятия в школе, то следует учитывать, что один и тот же материал может изучаться в разное время. Учитывая вышесказанное, авторы предлагают компоновку материала, приведенную в календарном плане.

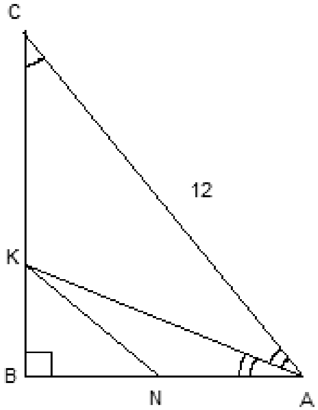
На занятиях не проводится доказательство теорем, а требуется знание формулировок и умение применять их к решению задач.

Все разделы содержат задачи двух типов: 1 – решение на готовых чертежах, 2 – задачи, требующие от ученика умение строить геометрический чертеж, по которому затем решается задача. Оформление решения геометрических задач требует от ученика четкого изображения чертежа, обозначения на нем характерных точек, записи: что дано и что требуется найти или доказать. При выполнении дополнительных построений их требуется описать.

Решение задачи разбивается на пункты (шаги), в каждом из которых указывается, какая часть геометрической фигуры рассматривается и на основании каких геометрических теорем делаются вычисления или доказательства. Допускается при решении ссылка на номер пункта ранее доказанного в этой задаче. Решение задачи оканчивается ответом или словами: «что и требовалось доказать».

В учебнике А.Ф. Погорелова «Геометрия 7–11» вписанная и описанная окружность изучается в 7 классе, а в учебнике Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия 7–9» эту тему проходят в 8 классе. Однако авторы считают возможным изучение этого материала с учениками 7 класса при наличии резерва времени, хотя этот материал не включается в итоговую контрольную работу.

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. Гипотенуза AC=12. Угол C равен 30° Биссектриса AK пересекает*



сторону BC в точке K. На стороне AB взята точка N. Отрезок KN параллелен гипотенузе AC. Найти длину отрезка BN.

Дано: ΔABC;

$\angle B = 90^o$;

$\angle C = 30^o$;

$\angle CAK = \angle KAB$;

$KN \parallel AC$; $AC = 12$.

Найти: BN.

Решение.

1) Рассмотрим ΔABC:

$\angle B = 90^o, \angle C = 30^o$ (по условию);

$\angle A = 180^o - \angle B - \angle C$ (теорема о сумме внутренних углов треугольника);

$\angle A = 180^o - 90^o - 30^o = 60^o$.

2) $\angle CAK = \angle KAB$ (по условию);

$\angle A = 60^o$ (см. первый пункт);

$\angle CAK = 30^o$;

$\angle KAB = 30^o$.

3) $KN \parallel AC$ (по условию);

AK – секущая;

$\angle AKN = \angle KAC = 30^o$ (накрест лежащие углы).

4) Рассмотрим ΔAKN:

$\angle NKA = \angle KAN = 30^o$;

ΔAKN – равнобедренный

$AN = KN$.

5) $\angle KNB$ – внешний угол ΔAKN;

$\angle KNB = 30^o + 30^o = 60^o$.

6) Рассмотрим ΔKBN:

$\angle NKB = 180^\circ - \angle B - \angle KNB$ (теорема о сумме внутренних углов треугольника);

$\angle NKB = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

7) $BN = \dfrac{1}{2}NK$ (теорема о катете, лежащем против угла в 30º).

8) $BA = BN + NA = 3BN$ (см. четвертый и седьмой пункты).

9) Рассмотрим ΔABC:

$AB = \dfrac{1}{2}AC$ (теорема о катете, лежащем против угла в 30º);

$AB = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$;

Так как $AB = 3BN$ (см. пункт восемь), то:

$BN = \dfrac{1}{3}AB$;

$BN=\dfrac{1}{3}\cdot 6=2$.

Ответ: $BN = 2$.

Приложение

КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Дата	**№ п/п**	**Тема**	**Контрольные мероприятия**	**Домашнее задание**
1	2	3	4	5
1 неделя	1	Числовые выражения		
	2	Сложение и вычитание смешанных чисел		
	3	Умножение, деление и возведение в степень		
2 неделя	4	Решение арифметических примеров		
	5	Решение арифметических примеров рациональным способом		
	6	Арифметические действия с десятичными дробями		
3 неделя	7	Самостоятельная работа по теме «Решение арифметических примеров»	Самостоятельная работа 1	
	8	Пропорция и её основное свойство		
	9	Нахождение неизвестного члена в пропорции		
4 неделя	10	Доли, части и проценты		
	11	Решение задач на проценты		
	12	Сложный процент		
5 неделя	13	Контрольная работа по теме «Арифметические примеры, пропорции и проценты»	Контрольная работа 1	
	14	Алгебраические выражения. Формулы		

Дата	№ п/п	Тема	Контрольные мероприятия	Домашнее задание
1	2	3	4	5
	15	Приведения подобных слагаемых		
6 неделя	16	Раскрытие и заключение в скобки алгебраического выражения		
	17	Вынесение общего множителя за скобки		
	18	Метод группировки		
7 неделя	19	Признаки делимости целых чисел на 2, 3, 5, 9, 10		
	20	Признаки делимости целых чисел на 4, 8, 11, 25		
	21	Решения задач на признаки делимости		
8 неделя	22	Самостоятельная работа по теме «Действие с алгебраическими выражениями»	Самостоятельная работа 2	
	23	Решение простейших алгебраических уравнений		
	24	Решение уравнений, содержащих коэффициенты, требующие арифметических вычислений		
9 неделя	25	Решение уравнений, представляющих произведение нескольких скобок равных нулю		
	26	Решение уравнений, требующих вынесение общего множителя за скобки		
	27	Разбор типичных ошибок при решении уравнений данного типа (деление на выражение, содержащие неизвестное)		

Дата	№ п/п	Тема	Контрольные мероприятия	Домашнее задание
1	2	3	4	5
10 неделя	28	Самостоятельная работа по теме «Решение алгебраических уравнений» (I часть)	Самостоятельная работа 3	
	29	Решение уравнений, с помощью приведения дробей к общему знаменателю		
	30	Решение уравнений по пройденной теме		
11 неделя	31	Понятие модуля, определение модуля алгебраического выражения		
	32	Раскрытие модуля		
	33	Решение уравнений, содержащих модуль		
12 неделя	34	Самостоятельная работа по теме «Решение алгебраических уравнений» (II часть)	Самостоятельная работа 4	
	35	Решение уравнений в целых числах		
	36	**Геометрия** Основные геометрические понятия		
13 неделя	37	Понятие параметра в уравнениях		
	38	Исследование решений уравнений в зависимости от значения параметра		
	39	Решение уравнений с параметром		
14 неделя	40	Контрольная работа по теме «Решение уравнений» (итоговая)	Контрольная работа 2	
	41	Решение комбинированных уравнений		

Дата	№ п/п	Тема	Контрольные мероприятия	Домашнее задание
1	2	3	4	5
	42	**Геометрия** Смежные и вертикальные углы. Решение задач		
15 неделя	43	Решение текстовых задач на части и проценты		
	44	Решение текстовых задач общего вида		
	45	**Геометрия** Треугольники. Их элементы и типы. Равнобедренные треугольники		
16 неделя	46	Решение текстовых задач на движение		
	47	Решение текстовых задач на работу		
	48	**Геометрия** Сумма внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Решение задач		
17 неделя	49	Контрольная работа по теме «Текстовые задачи»	Контрольная работа 3	
	50	Степени. Свойства степеней		
	51	**Геометрия** Признаки равенства треугольников. Решение задач		
18 неделя	52	Умножение, деление и возведение в степень		
	53	Преобразование чисел в виде произведения степеней		

Дата	№ п/п	Тема	Контрольные мероприятия	Домашнее задание
1	2	3	4	5
	54	Сложные выражения, содержащие степень		
19 неделя	55	Самостоятельная работа по теме «Степени»	Самостоятельная работа 5	
	56	**Геометрия** Признаки равенства прямоугольных треугольников		
	57	Решение геометрических задач		
20 неделя	58	Одночлены и многочлены. Стандартный вид одночлена и многочлена		
	59	Действия с одночленами и многочленами. Равенство многочленов		
	60	**Геометрия** Свойства прямоугольного треугольника с углом в 30°. Решение задач		
21 неделя	61	Разложение на множители алгебраического выражения		
	62	Формулы сокращённого умножения: $a^2 - b^2; (a - b)^2; (a + b)^2$		
	63	**Геометрия** Самостоятельная работа по теме «Углы и треугольники»	Самостоятельная работа 6	
22 неделя	64	Формулы сокращённого умножения: $(a + b)^3$; $(a - b)^3$; $a^3 + b^3$; $a^3 - b^3$		
	65	Применение формул сокращённого умножения при разложении на множители		

Дата	№ п/п	Тема	Контрольные мероприятия	Домашнее задание
1	2	3	4	5
	66	Решение уравнений с использованием формул сокращённого умножения		
23 неделя	67	Самостоятельная работа по теме «Формулы сокращённого умножения»	Самостоятельная работа 7	
	68	Понятие функции. Система координат. График функции		
	69	**Геометрия** Параллельные прямые. Углы, образованные при пересечении параллельных прямых секущей. Решение задач		
24 неделя	70	Прямая пропорциональная зависимость, линейная функция. Их графики		
	71	Построение графиков по точкам и путем сдвига		
	72	Графики кусочно-линейных функций. Графики с выколотыми точками		
25 неделя	73	Исследование функций		
	74	Графики функций с параметром		
	75	**Геометрия** Признаки параллельности прямых. Решение задач		
26 неделя	76	Самостоятельная работа по теме «Графики линейных функций»	Самостоятельная работа 8	
	77	Системы уравнений и методы их решений		

Дата	№ п/п	Тема	Контрольные мероприятия	Домашнее задание
1	2	3	4	5
	78	**Геометрия** Задачи на построение		
27 неделя	79	Определение точек пересечения прямых с помощью решения системы уравнений		
	80	Решение сложных систем уравнений. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений		
	81	Решение систем с параметром		
28 неделя	82	Повторение пройденного материала		
	83	Подготовка к итоговой контрольной работе		
	84	**Геометрия** Повторение пройденного материала		

Самостоятельная работа 1 «Решение арифметических примеров».

Самостоятельная работа 2 «Действие с алгебраическими выражениями».

Самостоятельная работа 3 «Решение алгебраических уравнений» I часть.

Самостоятельная работа 4 «Решение алгебраических уравнений» II часть.

Самостоятельная работа 5 «Степени».

Самостоятельная работа 6 «Углы и треугольники».

Самостоятельная работа 7 «Формулы сокращённого умножения».

Самостоятельная работа 8 «Графики линейных функций».

Контрольная работа 1 «Арифметические примеры, пропорции и проценты».

Контрольная работа 2 «Решение уравнений».

Контрольная работа 3 «Текстовые задачи».

Учитывая, что геометрия в 7-м классе в школе начинается с аксиом и основных понятий, целесообразно на курсах занятия по геометрии несколько сместить на вторую половину учебного процесса.

Настоящая программа прошла апробацию при подготовке учащихся 7-х классов к вступительным экзаменам в физико-математический лицей 1523 при МИФИ и использовалась более чем 10 лет.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1 по теме «Арифметические примеры, пропорции и проценты»

Вычислить.

1. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5\,.$$

Ответ: 9.

2. $$\frac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}\,.$$

Ответ: $x = 5$.

Вычислить рациональным способом.

3. $$\left(1\frac{2}{5}:2\frac{2}{5}-1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-1\frac{7}{15}-0{,}25-3\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}\right):(-0{,}1)^2\,.$$

Ответ: 210.

4. $$\frac{6}{25}:\frac{3}{8}=\left(3\frac{1}{3}y-1\right):2\frac{1}{12}\,.$$

Ответ: $y = 0{,}7$.

5. $$\left(7\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):6=\left(7\frac{1}{2}y+4\right):\frac{8}{9}\,.$$

Ответ: $y = -\frac{2}{5}$.

Контрольная работа 2 по теме «Решение уравнений»

Решить уравнения.

1. $7(2x+5)-3(4x+5)-(7x+2)=2$.

Ответ: $x = 3{,}2$.

2. $\dfrac{9x-5}{2}-\dfrac{3+5x}{3}-\dfrac{8x-2}{4}=2$.

Ответ: $x = 6$.

3. $(x-3)(5x-1)=2(x-3)+(3-x)(3x+2)$.

Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = \dfrac{1}{8}$.

4. $(4x-5)(8x+3)-(5-4x)+(3x-8)(8x-10)=(5-4x)^2$.

Ответ: $x_1 = 1\dfrac{1}{4}$, $x_2 = 0{,}7$.

Решить уравнение в целых числах.

5. $2y = xy+5$.

Ответ: $x_1 = –3; y_1 = 1$;
$x_2 = 1$; $y_2 = 5$;
$x_3 = 7$; $y_3 = –1$;
$x_4 = 3$; $y_4 = –5$;

6. Найти, при каких значениях неизвестного параметра a уравнение $5a^2y-4ay=25+ay$ имеет, а при каких не имеет решения.

Ответ: 1) при $a = 0$; $a = 1$ – не имеет решения;
2) при $a \neq 0$; $a \neq 1$ – имеет решения.

7. Решить уравнение: $1+3|9x-1|=10$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{4}{9}$, $x_2 = -\dfrac{2}{9}$.

Контрольная работа 3 по теме «Текстовые задачи»

1. Найти три последовательных нечётных числа, суммы которых равна 81.

Решение: $(2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) = 81$.

Ответ: 25; 27; 29.

2. Цену на товар сначала повысили на 20 %, а затем понизили на 20 %. Изменилась ли цена товара? Если изменилась, то на сколько процентов?

Ответ: уменьшилась на 4 %.

3. Вторая деталь весит больше первой в 5 раз, причём вторая деталь на 32 г тяжелее первой. Определить, сколько весит каждая деталь?

Ответ: 8; 40 г.

4. Из Москвы в Санкт-Петербург отправился пассажирский поезд, скорость которого равна 80 км/ч. Спустя 20 мин из Санкт-Петербурга в Москву отправился скорый поезд, скорость которого равна 90 км/ч. Через сколько часов после выхода поезда из Москвы произойдет встреча, если считать расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга равным 650 км?

Решение: x [ч] – время до встречи из Москвы;

$$80x + 90\left(x - \frac{1}{3}\right) = 650.$$

Ответ: 4 ч.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Самостоятельная работа 1 по теме «Решение арифметических примеров»

Вычислить.

1. $$\frac{\left(\left(7-6{,}35\right):6{,}5+9{,}9\right)\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\dfrac{1}{5}:0{,}25-1\dfrac{5}{6}\right)\cdot 1\dfrac{1}{4}}:0{,}125\,.$$

Ответ: $1\dfrac{2}{3}$.

2. $7:0{,}01\cdot 10:1000\cdot 0{,}1:0{,}001$

Ответ: 700.

3. $$\left[\frac{\left(-\dfrac{2}{3}:\dfrac{4}{9}\right)^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2:\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2}\right]^2$$

Ответ: 1.

Решить рациональным способом.

4. $\left(1\dfrac{23}{45}+16\dfrac{7}{20}-6\dfrac{1}{15}+0{,}65\right)\cdot\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $4\dfrac{4}{27}$.

Самостоятельная работа 2 по теме «Действие с алгебраическими выражениями»

1. Раскрыть скобки и упростить.

$-3(a-2(3a-4(4a+5)))+\frac{2}{7}\cdot 7a$.

Ответ: $-79a-120$

2. Вынести общий множитель за скобки.

1) $(5-2x)^2-(5x-2)(2x-5)+(35-14x)$.

Ответ: $(5-2x)(3x+10)$.

2) $x(3x-5)(5x+4)+(3x^2-5x)-x(3x-5)(10x-3)$.

Ответ: $x(3x-5)(8-5x)$.

Самостоятельная работа 3 по теме «Решение алгебраических уравнений» (I часть)

Решить уравнение.

1. $3(5x-3)+2(7x-1)-4(3x-7)=-34$.

Ответ: $x=-3$.

2. $8(3y-2)+6(5y-1)-3(7y-5)=3(11y-2)-1$.

Ответ: $y=0$.

3. $(x^2-x)(x-8)(x+5)(2x+1)=0$.

Ответ: $x_1=0, x_2=1, x_3=8, x_4=-5, x_5=-\frac{1}{2}$.

4. $(7x+5)(7x-5)+(7x-5)=0$

Ответ: $x_1=\frac{5}{7}, x_2=-\frac{6}{7}$.

5. $(x-2)(x+3)+(x-2)(2x+1)=2-x$.

Ответ: $x_1=2, x_2=-1\frac{2}{3}$.

Самостоятельная работа 4 по теме «Решение алгебраических уравнений» (II часть)

Решить уравнение.

1. $7(2x-3)-(x-4)+5(x+1)=3(7x-5)$.

Ответ: $x = 1$.

2. $\dfrac{4x-3}{2}-\dfrac{5-2x}{3}-\dfrac{3x-7}{6}=0$.

Ответ: $x = \dfrac{12}{13}$.

3. $x+1=(7x-1)(x+1)$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{2}{7}$.

4. $|x-3| = 2x+1$.

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

5. Определить, при каких значениях неизвестного a уравнение не имеет решения.

$8a^2x-5=-4ax$.

Ответ: при $a_1 = -\dfrac{1}{2}$; $a_2 = 0$.

Самостоятельная работа 5 по теме «Степени»

Вычислить.

1. $\dfrac{a^3 \cdot c^2 \cdot \left(c^4\right)^3 \cdot c^3}{a^{11} \cdot \left(c^3\right)^3 \cdot a^2 \cdot \left(a^2\right)^3}$.

Ответ: $\dfrac{c^8}{a^{16}}$.

2. $\dfrac{a^5 \cdot c^3 \cdot \left(c^2\right)^3 \cdot c}{a^2 \cdot \left(c^3\right)^3 \cdot a \cdot c}$.

Ответ: a^2.

3. $\dfrac{25 \cdot 9^2 \cdot 12}{3^4 \cdot 5^3 \cdot 2^4}$.

Ответ: $\dfrac{3}{20}$.

4. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{bc}\right)^2 \cdot (bc)^3 \cdot \left[\left(\dfrac{a}{bc}\right)^2\right]^5 \cdot \left[(bc)^2\right]^2}{\left(\dfrac{a}{bc}\right)^7 \cdot (bc)^2 \cdot \left(\dfrac{a}{bc}\right)}$.

Ответ: a^4bc.

5. $\dfrac{4 \cdot 18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n+1}}$, где n – натуральное число.

Ответ: 6.

Самостоятельная работа 6 по теме «Углы и треугольники»

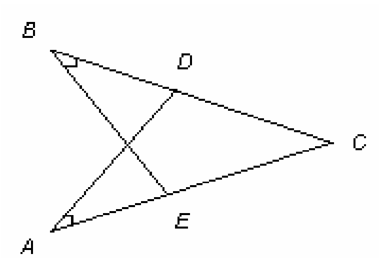
1. В треугольнике PQS биссектрисы углов P и Q пересекаются в точке O. Угол POQ равен $110°$, угол S в три раза меньше угла P. Найти углы треугольника PQS.

Ответ: $\angle S = 40°$. $\angle P = 120°$. $\angle Q = 20°$.

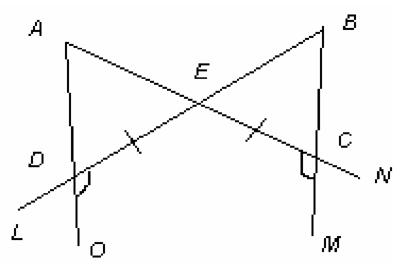
2. В треугольнике ABC точка D лежит на прямой BE. Точка E лежит на стороне AC. Известно, что $AD = DC$ и $\angle ADE = \angle EDC$. Доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.

3. Найти пары равных треугольников и доказать их равенство: (см. В. Полонский и др. Геометрия 7–11 кл. с. 7).

Дано: $AB = AC, \angle EBC = \angle DAC$.



Дано: $DE = EC, \angle EDO = \angle ECM$.



Самостоятельная работа 7 по теме «Формулы сокращённого умножения»

1. Разложить на множители.

а) $x^2 + x - 12$.

Ответ: $(x-3)(x+4)$.

б) $5 - 10xy - 5x^2 - 5y^2$.

Ответ: $5(1-x-y)(1+x+y)$.

в) $\left(x^2+1\right)^2 - 4x^2$.

Ответ: $(x-1)^2(x+1)^2$.

г) $25x(5x-1) + x^3(1-5x)$.

Ответ: $x(5x-1)(5-x)(5+x)$.

2. Решить уравнение.

а) $\left(36x^2 - 49\right) - (x-1)(12x-14) = 7 - 6x$.

Ответ: $x_1 = 1\frac{1}{6}$, $x_2 = -2\frac{1}{2}$.

б) $9x^2 + 21x + 25xy + 25y^2 + 35y + 5xy$.

Ответ: $(3x+5y)(3x+5y+7)$.

Самостоятельная работа 8 по теме «Графики линейных функций»

1. Построить график функции

$$y = -3\frac{1}{2}x - 7.$$

Определить, при каких значениях x функция равна нулю; функция больше нуля (положительная); функция меньше нуля (отрицательная).

2. Построить график функции

$$y = \frac{6x^2 + 3x}{3x}.$$

3. Найти переменную a (параметр), если линейные функции $3y - x = 2$ и $y = 2x - a$ пересекаются с прямой $y = -x$ в одной точке.

4. Построить график $y = -|x| + 2$.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1. Найти x из пропорции:

$$\frac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\cdot\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

2.

1) Решить уравнение: $(2x-1)(5x+3)=4x^2-1$.

2) При каких значениях a уравнение имеет корень

$\frac{5-(a+2)x}{3}=\frac{3-ax}{5}$?

3. Построить график функции:

1) $y=\begin{cases}|x|+1 \text{ при } x<0;\\ 1 \text{ при } x\geq 0;\end{cases}$

2) $y=(2x-1)^2+(x+1)^2-(5x^2-1)$.

По графику полученной функции определить, при каких значениях x значение y: а) равно нулю, б) больше нуля, в) меньше нуля.

4. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=-x-2y;\\ x-y=3;\end{cases}$

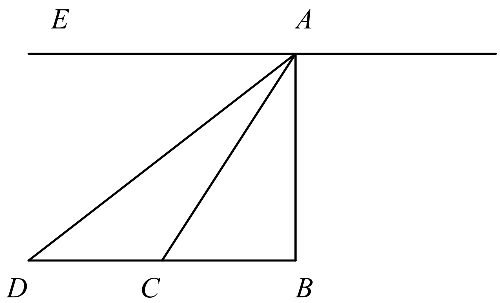
2) $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-\frac{y-2}{3}-2=0;\\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{3}-4=0.\end{cases}$

5. Известно, что $\frac{2(b+c)}{4c-b}=3$. Найти, чему равно значение выражения: $\frac{8b+3c}{2b+4c}$.

6. Группа школьников во время каникул совершала поход из Москвы в Простоквашино. Сначала они проехали 30 км на электричке, затем проплыли на плоту по реке 20 % оставшейся части пути. После этого школьники прошли через лес расстояние в 1,5 раза больше того, что проплыли по реке. Оставшуюся часть маршрута они проехали на грузовике со скоростью 40 км/ч за время 1 ч 30 мин. Чему равно расстояние от Москвы до Простоквашино?

7. Сократить дробь $\dfrac{6^n \cdot 48}{3^{n-1} \cdot 2^{n+2}}$.

8. В треугольнике *ABD* ($\angle ABD = 90°$) через вершину *A* проведена прямая *AE* параллельно стороне *BD*. Найти угол $\angle EAD$, если известно, что $\angle ACB = 60°$, $BC = 5$ см и $BD = 15$ см.



Решение итоговой контрольной работы.

1. Найти x из пропорции:

$$\frac{x}{10{,}5 \cdot 0{,}24 - 15{,}15 : 7{,}5} = \frac{9 \cdot \left(1\frac{11}{20} - 0{,}945 : 0{,}9\right)}{1\frac{3}{40} - 4\frac{3}{8} : 7}.$$

1) $10{,}5 \cdot 0{,}24 = 2{,}52$;

2) $15{,}15 : 7{,}5 = 2{,}02$;

3) $2{,}52 - 2{,}02 = 0{,}5$;

4) $0{,}945 : 0{,}9 = 1{,}05$;

5) $1{,}55 - 1{,}05 = 0{,}5$;

6) $9\cdot 0{,}5=4{,}5$;

7) $4\frac{3}{8}:7=\frac{35}{8\cdot 7}=\frac{5}{8}$;

8) $1\frac{3}{40}-\frac{5}{8}=\frac{43}{40}-\frac{25}{40}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}=0{,}45$;

$\frac{x}{0{,}5}=\frac{4{,}5}{0{,}45}$;

$x=\frac{0{,}5\cdot 4{,}5}{0{,}45}=5$.

Ответ: 5.

2.

1) Решить уравнение: $(2x-1)(5x+3)=4x^2-1$.

$(2x-1)(5x+3)=(2x-1)(2x+1)$;

$(2x-1)(5x+3)-(2x-1)(2x+1)=0$;

$(2x-1)[(5x+3)-(2x+1)]=0$;

а) $2x-1=0$;

$x_1=\frac{1}{2}$;

б) $5x+3-2x-1=0$;

$3x+2=0$;

$x_2=-\frac{2}{3}$.

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{2}{3}$.

2) При каких значениях a уравнение $\frac{5-(a+2)x}{3}=\frac{3-ax}{5}$ имеет корень?

$\frac{5-(a+2)x}{3}^{\backslash 5}=\frac{3-ax}{5}^{\backslash 3}\ \Big|\cdot 15$;

$25-5(a+2)x=9-3ax$;

$16-5ax-10x=-3ax$;

$16 = 5ax + 10x - 3ax$;

$x(5a - 3a + 10) = 16$;

$x(2a + 10) = 16$;

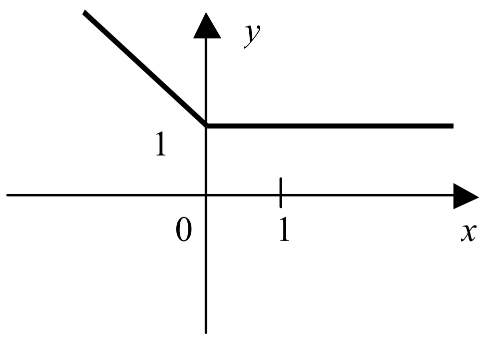
$2x(a + 5) = 16$;

$$x = \frac{8}{a + 5}.$$

Ответ: $a \neq -5$.

3. Построить график функции.

1) $y = \begin{cases} |x| + 1 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$



2) $y = (2x - 1)^2 + (x + 1)^2 - (5x^2 - 1)$.

По графику полученной функции определить, при каких значениях x значение y: а) равно нулю, б) больше нуля, в) меньше нуля.

$y = (2x - 1)^2 + (x + 1)^2 - (5x^2 - 1)$;

$y = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 2x + 1 - 5x^2 + 1$;

$y = -2x + 3$.

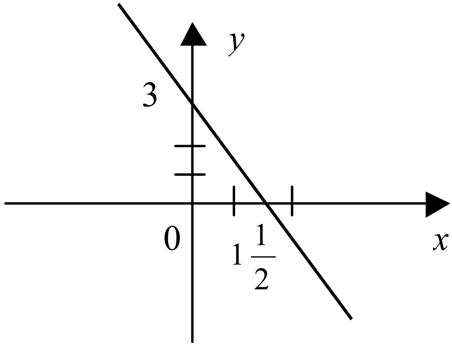
$x_1 = 0$; $y_1 = 3$

$y_2 = 0$; $x_2 = 1\frac{1}{2}$

а) $y = 0$, при $x = 1\frac{1}{2}$;

б) $y > 0$, при $x < 1\frac{1}{2}$;

в) $y < 0$, при $x > 1\frac{1}{2}$.



4. Решить систему уравнений.

1) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = -x - 2y; \\ x - y = 3. \end{cases}$

$\begin{cases} (x - y)^2 = -x - 2y; \\ x - y = 3; \end{cases}$

$+\begin{cases} -x - 2y = 9, \\ \quad x - \ y = 3; \end{cases}$

$-3y = 12$;

$y = -4$;

$x = -1$.

Ответ: $x = -1$, $y = -4$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-2}{3} - 2 = 0; \\ \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y+1}{3} - 4 = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}^{\backslash 3} - \dfrac{y-2}{3}^{\backslash 2} - 2^{\backslash 6} = 0, \\ \dfrac{x-1}{4}^{\backslash 3} + \dfrac{y+1}{3}^{\backslash 4} - 4^{\backslash 12} = 0. \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 6 \\ \cdot 12 \end{array} \right.$

$\begin{cases} 3x + 9 - 2y + 4 - 12 = 0, \\ 3x - 3 + 4y + 4 - 48 = 0. \end{cases}$

$+\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 47 = 0; \end{cases}$

$-6y + 48 = 0$;

$y = 8$;

$3x = 15$; $x = 5$.

Ответ: $x = 5$, $y = 8$.

5. Известно, что $\dfrac{2(b+c)}{4c - b} = 3$. Найти, чему равно значение выражения: $\dfrac{8b + 3c}{2b + 4c}$.

$$\frac{2(b+c)}{4c-b}=3;$$

$$\frac{2b+2c}{4c-b}=3;$$

$$2b+2c=12c-3b;$$

$$5b=10c;$$

$$b=2c;$$

$$\frac{8b+3c}{2b+4c}=\frac{8\cdot 2c+3c}{2\cdot 2c+4c}=\frac{19c}{8c}=2\frac{3}{8}.$$

Ответ: $2\frac{3}{8}$.

6. $S_1 = 30$ км – путь на электричке;

$S = x$ [км] – весь путь;

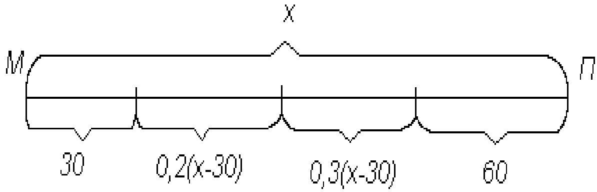
$S - S_1 = x - 30$ км;

$0{,}2(x-30)$ [км] – путь по реке.

$1{,}5\cdot 0{,}2(x-30) = 0{,}3(x-30)$ [км] – путь по лесу.

$$\begin{cases} \text{Скорость грузовика} = 40 \text{ км/ч;} \\ \text{время грузовика} = 1\frac{1}{2} \text{ ч.} \end{cases}$$

$$S_{\text{на груз}} = \frac{40\cdot 3}{2} = 60 \text{ км}.$$



$x = 30 + 60 + 0{,}5(x-30);$

$x = 90 + 0{,}5x - 15;$

$0{,}5x = 75;$

$x = 150$ км.

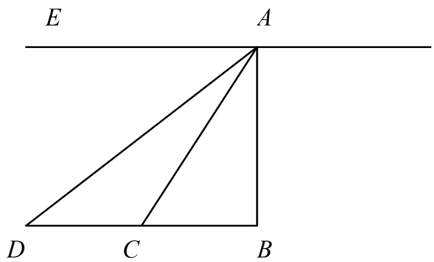
Ответ: расстояние от Москвы до Простоквашино – 150 км.

7. Сократить дробь $\dfrac{6^n \cdot 48}{3^{n-1} \cdot 2^{n+2}}$.

$$\frac{6^n \cdot 48}{3^{n-1} \cdot 2^{n+2}} = \frac{3^n \cdot 2^n \cdot 3 \cdot 2^4}{3^{n-1} \cdot 2^{n+2}} = \frac{3^{n+1} \cdot 2^{n+4}}{3^{n-1} \cdot 2^{n+2}} = 3^{n+1-n+1} \cdot 2^{n+4-n-2} =$$

$= 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36$.

8.



Дано: ΔABD.
$\angle ABD = 90°$, $AE \parallel BD$.
$\angle ACB = 60°$, $BC = 5$ см.
$BD = 15$ см.
Найти $\angle EAD$.

Решение.

$\angle CAB = (180° - 90° - 60°) = 30°$;

$AC = 2BC$ (катет, лежащий против угла в 30°);

$AC = 10$ см;

$DC = BD - BC$;

$DC = 15 - 5$;

$DC = 10$;

ΔDAC – равнобедренный ($DC = AC$);

$\angle DAC = \angle ADC$;

$\angle ADC = \angle EAD$ (внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AE и BD и секущей AD);

$\angle EAD = \angle DAC$;

$\angle EAC = 90° - 30° = 60°$;

$\angle EAD = \dfrac{1}{2} \angle EAC$;

$\angle EAD = \dfrac{1}{2} 60^o$;

$\angle EAD = 30°$.

Ответ: $\angle EAD = 30°$.

Татьяна Анатольевна Пыжова
Геннадий Викторович Лупенко
Ирина Александровна Масленникова

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для преподавателей математики, работающих в седьмых классах (с углубленным изучением математики)

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет подготовлен К.А. Бобровой

Подписано в печать 09.12.2008 Формат 60x84 1/16
Печ.л. 3,5 Уч.-изд.л. 3,5 Тираж 500 экз.
Изд. № 053-1 Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31