Федеральное агентство по образованию

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Т.А. Пыжова, Г.В. Лупенко, И.А. Масленникова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для углубленного изучения математики в 7-м классе

Москва 2009

УДК 51(075)
ББК 22.127
П 94

Пыжова Т.А., Лупенко Т.В., Масленникова И.А. **Математика:** *Учебное пособие для углубленного изучения математики в 7-м классе.* М.: МИФИ, 2009. – 76 с.

Даны примеры задач по алгебре и геометрии для 7-го класса.

Задачи систематизированы по темам и снабжены ответами.

Пособие предназначено учащимся, которые готовятся поступать в 8-е классы вечерних лицеев при МИФИ, а также учителям, организующим эту подготовку.

Авторы:

Пыжова Т.А., кандидат технических наук, доцент МИФИ, почетный работник «Высшего образования РФ»;

Лупенко Г.В., кандидат физико-математических наук, доцент МИФИ, соросовский учитель, почетный работник «Высшего образования РФ»;

Масленникова И.А., соросовский учитель, заслуженный учитель РФ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.Н. Рурукин

ISBN 978-5-7262-1051-3

Содержание

Требованияк математической подготовке учащихся..................4

Алгебра

Примеры и задачи 5
Раздел I. Арифметические примеры 5
Раздел II. Признаки делимости..8
Раздел III. Проценты...9
Раздел IV. Пропорции..10
Раздел V. Уравнения...11
Раздел VI. Текстовые задачи...19
Раздел VII. Степени 24
Раздел VIII. Одночлены, многочлены. Разложение многочленов на множители 27
Раздел IX. Понятие о функции и графике функции 28
Раздел X. Системы уравнений..33
Ответы 37

Геометрия

Справочник по геометрии 46
Задачи..50
Раздел I. Смежные и вертикальные углы 50
Раздел II. Равенство треугольников. Сумма углов треугольника..51
Раздел III. Равнобедренные треугольники...53
Раздел IV. Призники и свойства параллельных прямых.............55
Раздел V. Окружность 57
Раздел VI. Задачи на построение...58
Раздел VII. Задачи на повторение 59
Ответы 61

ТРЕБОВАНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ

Для успешной сдачи письменного экзамена по математике учащиеся должны хорошо владеть знаниями и умениями по следующим разделам.

1. Натуральные числа и их свойства. Делимость чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100 и т. д. Разложение числа на простые множители. Учащиеся должны владеть понятиями, связанными с делимостью чисел, на уровне, позволяющем использовать их при решении широкого круга задач.
2. Решение задач на все действия с обыкновенными и десятичными дробями. Учащиеся должны владеть достаточно развитой техникой вычисления с рациональными числами: бегло и уверенно выполнять арифметические действия письменно, владеть навыками устных вычислений, а также уметь применять приемы, упрощающие вычисления.
3. Решение задач на проценты. Нахождение процента от числа. Нахождение числа по процентам от него. Нахождение процентного отношения двух чисел.
4. Модуль числа. Решение простейших уравнений, содержащих модуль.
5. Отношение двух чисел. Нахождение числа по его части. Пропорция. Свойства пропорции. Деление числа в данном отношении. Решение задач на пропорциональное деление.
6. Решение линейных уравнений и их систем. Решение линейных уравнений, содержащих параметр. Исследование систем линейных уравнений.
7. Решение текстовых задач. Анализ полученных результатов.
8. Понятие функции и ее графика. Учащиеся должны понимать содержательный смысл важнейших свойств функций; находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком, решать обратную задачу; уметь строить и читать график линейной функции.
9. Многочлен. Равенство многочленов. Действия с многочленами. Формулы сокращенного умножения. Методы разложения многочленов на множители. Представление о методе неопределенных коэффициентов.
10. Понятие степени с натуральным показателем. Действия со степенями.
11. Решение геометрических задач. Учащиеся должны уметь выполнять чертежи по условию задачи, вычислять значения геометрических величин (длин, углов), применяя изученные свойства и формулы, проводить аргументацию в ходе решения задач.

Настоящее пособие не заменяет школьного учебника, а только дополняет его и углубляет.

А Л Г Е Б Р А

П р и м е р ы   и   з а д а ч и

Раздел I. Арифметические примеры

Выполнить действия.

1. $\left(1\frac{1}{4}\cdot 2{,}6-4\right):1{,}2+0{,}3$.

2. $0{,}25+\frac{1}{12}:\left(\frac{1}{3}\cdot 1{,}25-\frac{9}{16}\right)$.

3. $\dfrac{\frac{2}{9}:0{,}8-0{,}5}{1{,}6\cdot 0{,}25}$.

4. $\dfrac{2\frac{3}{4}:\left(1\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):3\frac{1}{6}}{\left(3\frac{1}{2}:4\frac{2}{3}+4\frac{2}{3}:3\frac{1}{2}\right)\cdot 4\frac{4}{5}}$.

5. $\dfrac{\left(\frac{2}{15}+\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{43}-\left(2:2\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{32}}{\left(11\frac{5}{11}-8\frac{21}{22}\right):1\frac{2}{3}}$.

6. $\dfrac{\frac{3}{4}:\frac{5}{6}+2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-1:1\frac{1}{6}}{\left(\left(1\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{4}\right):\frac{7}{8}}$.

7. $227{,}36:(865{,}6-20{,}8\cdot 40{,}5)\cdot 8{,}38+1{,}12$.

8. $275{,}4:(22{,}74+9{,}66)\cdot(937{,}7-30{,}6\cdot 30{,}5)$.

9. $$\frac{\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{12}:\frac{5}{14}\right)^3}{\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}:\frac{7}{18}}}.$$

10. $$\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(\frac{4}{9}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}:\frac{4}{9}\right)^2}\right)^2.$$

11. $(2-5+7-1)^2:(-3)^2-21$.

12. $(8-11+5-5)^3:(-2)^2+3\frac{1}{2}$.

13. $1{,}7\cdot 100:0{,}1\cdot 0{,}0001:10:0{,}01$.

14. $\left(1{,}5^2-2{,}1\cdot 1\frac{1}{2}\right):1{,}2$.

15. $\left(1\frac{1}{5}\cdot 0{,}7-1{,}2^2\right):1\frac{1}{2}$.

16. $$\frac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$$

17. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}} + 0{,}125 \right) : 2\dfrac{1}{2} + 0{,}43$.

18. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1+\dfrac{1}{15}\right):\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1-\dfrac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{3}+0{,}25-\dfrac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{7}{13}}$.

19. $\left(\dfrac{3\dfrac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\dfrac{1}{3}} \cdot \dfrac{4{,}6-2\dfrac{1}{3}}{4{,}6+2\dfrac{1}{3}} \cdot 5{,}2 \right) : \left(\dfrac{0{,}05}{\dfrac{1}{7}-0{,}125} + 5{,}7 \right)$.

20. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{16}\right):\dfrac{169}{24}}$.

21. $\dfrac{\dfrac{5}{9}:0{,}4-1{,}5}{0{,}008\cdot 12{,}5}$.

22. $\dfrac{3{,}75:1\dfrac{1}{2}+\left(1{,}5:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}}{2:3\dfrac{1}{5}+\left(3\dfrac{1}{4}:13\right):\dfrac{2}{3}-\left(2\dfrac{5}{18}-\dfrac{17}{36}\right)\cdot\dfrac{18}{65}}$.

23. $\dfrac{\left(\left(3\dfrac{7}{12}-2\dfrac{11}{18}+2\dfrac{1}{24}\right)\cdot 1\dfrac{5}{31}-\dfrac{3}{52}\left(3\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\dfrac{7}{13}}{\dfrac{19}{84}:\left(5\dfrac{13}{42}-2\dfrac{13}{28}+\dfrac{5}{24}\right)+1\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{9}}$.

Вычислить наиболее удобным способом (без использования микрокалькулятора).

24. $\dfrac{3{,}5^2-2{,}5^2}{0{,}8\cdot 0{,}6-0{,}6}$.

25. $\dfrac{1{,}6\cdot 0{,}4-0{,}4}{1{,}4^2-2{,}6^2}$.

26. $\dfrac{0{,}2\cdot 1{,}8+0{,}8\cdot 1{,}8}{1{,}3^2-0{,}5^2}$.

27. $\dfrac{0{,}2\cdot 0{,}6-0{,}2\cdot 1{,}6}{1^2-0{,}8^2}$.

28. $\left(3\dfrac{13}{15}-12\dfrac{3}{20}-5\dfrac{4}{45}-0{,}85\right)\cdot 3$.

29. $\dfrac{83^2+2\cdot 83\cdot 17+17^2}{83^2-17^2}$.

30. $\left(-5{,}17:1\dfrac{3}{4}+1{,}67\cdot\dfrac{4}{7}\right)\cdot\left(-1\dfrac{1}{11}\right)$.

31. $\left(7{,}52\cdot\dfrac{5}{9}-(-11{,}48):1\dfrac{4}{5}\right):0{,}38$.

Раздел II. Признаки делимости

Основные признаки делимости натуральных чисел:

Число делится на 2, если последняя цифра этого числа — четная;

Число делится на 3, если сумма цифр этого числа делится на 3;

Число делится на 4, если две последние цифры его образуют число, которое делится на 4;

Число делится на 5, если его последняя цифра — 0 или 5;

Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8;

Число делится на 9, если сумма цифр этого числа делится на 9;

Число делится на 10, если его последняя цифра — 0;

Число делится на 11, если разность сумм цифр числа, стоящих на четных и нечетных местах кратно 11.

1. Какие цифры можно поставить вместо звездочки, чтобы число делилось без остатка на 3 и на 5 одновременно:
1) 241*; 3) 43*5; 2) 1734*; 4) 43*0?

2. Определить, делится ли число 1234067895 без остатка на 45?

3. Вставить в числе $\underbrace{222...22}_{13\text{ цифр}} * 5$ цифру вместо звездочки, чтобы число делилось на 75 .

4. Какую цифру нужно поставить вместо звездочки в число *137812, чтобы вновь полученное число делилось на 6?

5. Является ли число 71634453 простым или составным?

6. К числу $\underbrace{111\ldots11}_{15\text{ цифр}}$ допишите по одной цифре слева и справа так, чтобы вновь полученное число делилось на 45. Найти все возможные варианты.

7. Дано число — 7453*41. Определить число сотен, если число делится на 9.

8. Известно, что число 173913871* делится на 12 без остатка. Определить цифру *?

9. Определить число десятков, если число 7359917383*6 делится на 8 без остатка. Рассмотреть все возможные варианты.

10. Определить, делятся ли числа 1892 и 5280 на 11?

Раздел III. Проценты

Процентом называют одну сотую часть числа. Чтобы перевести проценты в десятичную дробь, надо разделить число процентов на 100.

1. Найти:
а) 1,5 % от 40; б) 3 % от 60; в) 15 % от 500.

2. Чему равно число:
а) 3 % которого равны 63; б) 8 % которого равны 48; в) 25 % которого равны 125?

3. Сколько процентов составляет число:
а) 26 от числа 200; б) 5 от числа 100; в) 29 от числа 500?

4. 3 % от вклада составляет 150 руб. Какова величина вклада?

5. Каков процент жирности молока, если в 1 кг его содержится 45 г жира?

6. По вкладам начисляется ежегодно 2 % от вклада. В банк внесли 150 руб. Какой станет сумма вклада через два года?

7. Что больше: 20 % от 10 % данного числа или 10 % от его 20 %?

Раздел IV. Пропорции

Равенство двух отношений называют пропорцией. Основное свойство пропорции: в верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Решить пропорции.

1. $5\frac{3}{5}:3\frac{1}{2}=5\frac{1}{4}:X$.

2. $y:3\frac{1}{5}=4\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}$.

3. $0{,}2:(x-2)=\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$.

4. $2\frac{2}{3}:0{,}24=1\frac{7}{9}:(x+0{,}06)$.

5. $\frac{4}{3+x}=\frac{2}{3}$.

6. $\frac{5}{6}=\frac{10}{2x-3}$.

7. $\frac{2x-1}{3}=\frac{1}{2}$.

8. $\frac{6}{3x+2}=\frac{2}{5}$.

9. $\dfrac{0{,}75-\dfrac{1}{6}}{0{,}3+\dfrac{8}{15}}=\dfrac{1{,}12}{X}$.

10. $\dfrac{6\dfrac{3}{5}-3\dfrac{3}{14}}{(21-1{,}25):2{,}5}=\dfrac{X}{5\dfrac{5}{6}}$.

11. $\dfrac{\dfrac{11}{7}:12{,}5}{2\dfrac{1}{7}-1{,}2}=\dfrac{5}{18\cdot\left(X-4\dfrac{2}{3}\right)}$.

14. $\dfrac{11-9{,}5}{3{,}75+X}=\dfrac{0{,}6\cdot 35}{87{,}5}$.

12. $\dfrac{\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{20}}{23-X}=\dfrac{2{,}5+\dfrac{1}{3}}{21{,}25}$.

15. $y:\dfrac{3}{14}=3\dfrac{1}{9}:\dfrac{4}{9}$.

13. $\dfrac{\left(2+\dfrac{7}{30}-\dfrac{5}{18}\right):2\dfrac{2}{3}}{0{,}04}=\dfrac{3X-2}{3}$.

16. $\dfrac{2\dfrac{2}{3}}{X+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1\dfrac{1}{2}}{X-1\dfrac{1}{8}}$.

17. $\dfrac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\dfrac{1}{7}-1\dfrac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{x}=\dfrac{3\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}:\dfrac{1}{6}}{41\dfrac{23}{84}-40\dfrac{49}{60}}$.

18. $\dfrac{0{,}125x}{\left(\dfrac{19}{24}-\dfrac{21}{40}\right)\cdot 8\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\dfrac{28}{63}-\dfrac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$.

Раздел V. Уравнения

Равенство, которое содержит неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или установить, что их нет.

Выражение вида $ax + b = 0$ называется линейным уравнением, где a и b — некоторые числа; x — переменная.

Основные свойства уравнений:

• к обеим частям уравнения можно прибавить или вычесть одно и то же число;

• любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный;

• обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Решить уравнения.

I тип уравнений (преобразование уравнений)

1. $2\frac{1}{3}a = 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{9}$.

2. $8\frac{1}{2}z = 3\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{11}$.

3. $5(x + 7) = 3(2x - 3)$.

4. $0{,}2(x - 2) = 0{,}7(x + 3)$.

5. $2(x + 3) - 3(x + 2) = 5 - 4(x + 1)$.

6. $3(x - 2) - 2(x - 1) = 17$.

7. $3 - 5(x - 1) = x - 2$.

8. $11(y - 4) + 10(5 - 3y) - 3(4 - 3y) = -6$.

9. $2(x + 1) - 1 = 3 - (1 - 2x)$.

10. $6(1{,}2x - 0{,}5) - 1{,}3x = 5{,}9x - 3$.

11. $8(1{,}3x + 0{,}25) - 6{,}6x = 3{,}8x + 2$.

12. $25x - 17 = 4x - 5 - 13x + 14 + 34x$.

13. $7(-12 + y) - 5(-18 + y) = 6$.

14. $(x + 3)\,6 = (x + 1)\,9$.

15. $3(y+7)-4(y+4)=0$.

16. $-3{,}2a+4{,}8=-2(1{,}2a+2{,}4)$.

17. $-5(0{,}8y-1{,}2)=-y+7{,}2$.

18. $13x(6x-1)+24x=-13-6x(9-13x)$.

19. $5y(12y+7)-29y=30+4y(15y-11)$.

20. $7x(6x-5)+42x=3x(5+14x)+49$.

21. $1\frac{1}{6}+1\frac{5}{6}\left(X:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=-2{,}5$.

22. $\left(1{,}7:\left(1\frac{2}{3}X-3{,}75\right)\right):\frac{8}{85}=1\frac{5}{12}$.

23. $\left(\frac{55}{84}:X+1{,}5\right)\cdot\frac{15}{37}=\frac{1}{3}+\frac{8}{21}$.

24. $\left(1\frac{11}{39}X-1\frac{17}{18}\right):\left(\frac{5}{6}\right)^2=0{,}25-\frac{1}{20}$.

25. $\left(2\frac{7}{30}-\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}=5X-\frac{3}{20}$.

26. $0{,}9\left(3:2{,}25-\frac{1}{8}\left(1\frac{2}{3}+X\right)\right)-\frac{4}{7}:0{,}8=\frac{2}{7}$.

II тип уравнений (преобразование уравнений и разложение на множители; применение формул сокращенного умножения)

1. $-5x^2+6x=0$.

2. $8y^2-y=0$.

3. $(x^2-x)(2x+1)(3x+5)=0$.

4. $(9x-3)(5x+2)(x^2+4x)=0$.

5. $(5x-7)(8x+1)=(7-5x)$.

6. $(x-1)(2x+1)+(x-1)=(x+1)(x-1)$.

7. $(2-3x)(x+1)-(3x-2)(3x+1)=0$.

8. $(4x-1)(5x+7)-(1-4x)+(4x-1)(3x+2)=0$.

9. $(5y^2+y)(3y-1)+2(y+5y^2)=0$.

10. $(7y-5)-(y-8)(5-7y)+(7y-5)(3y+1)=0$.

11. $(4a-1)+(1-4a)(3a+1)=(1-4a)$.

12. $y+4-y(y+4)=0$.

13. $(x-6)^2-2x+12=0$.

14. $5y-5-(y-1)^2+1-y=0$.

15. $(x-2)^2+3x-6-5(2-x)=0$.

16. $-2(5-3x)=(3x-5)^2$.

17. $2x-14+5(7-x)=(7-x)^2$.

18. $x^2(x-8)-3x(x-8)^2=0$.

19. $4x^2-9=0$.

20. $1-4y^2=0$.

21. $2a^2-8=0$.

22. $(x^2+2x+1)+(x+1)(3x-1)=0$.

23. $x^3-5x^2-4x+20=0$.

24. $4y-6=4y^2-9$.

25. $(5x+4)\,(3x-2)=9x^2-12x+4$.

26. $(x-1)\,(3x+5)=1-x^2$.

27. $3x+6=x^2-4$.

28. $(3x+1)\,(5x-3)+\left(9x^2+6x+1\right)=0$.

29. $(2x-1)\,(8x+1)=-4x^2+4x-1$.

30. $(3x-1)\,(8x+5)=-18x^2+12x-2$.

31. $(7x-1)\,(3x+5)=9x^2+30x+25$.

32. $(2x+3)\,(3x-7)=49-9x^2$.

33. $(3x+2)\,(5x-9)=27x^2-12$.

34. $(8x-1)\,(x-2)=5x^2-20x+20$.

35. $(3x+1)\,(7x+5)=1-9x^2$.

36. $(x-1)\,(8x+3)=-3x^2+6x-3$.

37. $(2x-3)\,(7x+2)=8x^2-24x+18$.

38. $(x-3)\,(2x+5)=25-4x^2$.

39. $(11y-7)\,(1-8y)=256y^2-4$.

40. $(9z+1)\,(1-5z)=162z^2-2$.

41. $49x^2-25=(5-7x)\,(3x-2)$.

42. $0{,}25-x^2=(x-0{,}5)\,(2x+0{,}7)$.

43. $0{,}64-x^2=(3x-7)\,(x-0{,}8)$.

44. $0{,}81=(2x-0{,}9)\,(3x-5)+4x^2$.

45. $0{,}36x^2-49=(6x-7)\,(7-0{,}6x)$.

46. $64x^2-48x+9=(3-8x)\,(3x-8)$.

47. $x^2-4x+4=x-2$.

III тип уравнений (приведение уравнений к общему знаменателю)

1. $7-\dfrac{x}{2}=3+\dfrac{7x}{2}$.

2. $9-\dfrac{2x}{3}=7+\dfrac{x}{3}$.

3. $\dfrac{5x}{6}-\dfrac{1-3x}{5}=x-\dfrac{x-7}{15}-1$.

4. $\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{3-4x}{4}-\dfrac{3-5x}{8}=0$.

5. $\dfrac{4x-3}{2}-\dfrac{5-2x}{3}=\dfrac{3x-4}{3}$.

6. $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{5x+2}{12}=\dfrac{5+3x}{4}$.

7. $\dfrac{5x}{2}-\dfrac{x-3}{3}=1+\dfrac{x-5}{6}$.

8. $8\left(11-\dfrac{3}{4}z\right)=16z-44$.

9. $\dfrac{x(x-1)}{7}-\dfrac{2(x^2+1)}{28}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{14}$.

10. $\dfrac{(x-2)^2}{5}+\dfrac{2x^2-3}{15}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{3}$.

11. $\dfrac{4x-3}{2}-\dfrac{5-2x}{3}-\dfrac{4x-7}{6}=0$.

12. $\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{3-4x}{4}-\dfrac{3-5x}{8}=0$.

IV тип уравнений (уравнения с модулем)

Модуль положительного числа равен самому числу.

Модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу.

Если модуль обозначен буквой, то $|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Модуль нуля равен нулю: $|0|=0$.

Если модуль записан от выражения, содержащего букву, то следует рассматривать два случая:

• когда выражение, стоящее под знаком модуля больше или равно нулю, то знак модуля можно опустить;

• когда выражение под знаком модуля меньше нуля, то при снятии знака модуля следует умножить все выражение на минус единицу.

1. $|x+10|=7$.

2. $|3+2x|=2-3x$.

3. $14=7|x+1|$.

4. $|2x-1|=7$.

5. $2|x-1|+1=9$.

6. $|x|-11=1$.

7. $|x-1|=|x+3|$.

8. $|3x|=0{,}09$.

9. $|x|=1$.

10. $2|x|=0{,}16$.

11. $7-4|2x+1|=3$.

12. $|6+5x|=5-6x$.

13. $|5+3x|=3-5x$.

V тип уравнений (уравнения в целых числах)

1. $y(x+1)=3$.

2. $xy-y=6$.

3. $2y-3xy=5$.

4. $xy-6=-x$.

5. Пусть число имеет a-десятков и b-единиц. Известно, что число в 5 раз больше суммы цифр. Найдите числа a и b.

6. $xy+x=8$.

7. $2x-xy=4$.

8. $3y+2xy=5$.

VI тип уравнений (уравнения с параметрами)

Уравнение, содержащее кроме цифр и неизвестного еще величину, обозначенную буквой, будем называть уравнением с параметром.

Для решения уравнений такого типа необходимо сначала найти неизвестное, считая параметр (букву) как некоторое число, а затем исследовать полученный результат на наличие решений в зависимости от параметра. Методы решения заданий такого типа достаточно разнообразны: либо проводится перебор всех возможных вариантов, либо используются графические представления, а затем проводится анализ полученных графиков. В данном пособии рассмотрены простейшие варианты уравнений с параметрами.

Определить, при каких значениях a уравнение имеет решение.

1. $\dfrac{1-3x}{a}=1$.

2. $\dfrac{2x-a}{8}=3$.

3. $8=ax-3a$.

4. $(a-2)x+5=11$.

5. $5-2ax=2(7+x)$.

6. $\dfrac{8-3ax}{2}=\dfrac{8-ax}{6}$.

7. $7ax-56x+5=0$.

8. $3ax+21x-7=0$.

9. $\dfrac{8-(a+4)x}{7}=\dfrac{5+ax}{3}$.

10. $\dfrac{3x-(a-2)x}{3}=\dfrac{7+ax}{2}$.

11. $\dfrac{3(3ax-1)}{7}=\dfrac{x\left(a^2+2a\right)}{2}$.

12. $\dfrac{2(7ax+4)}{5}=\dfrac{ax(a+3)}{2}$.

При каких значениях a уравнение не имеет решений?

13. $6a^2x-48ax-7=0$.

Раздел VI. Текстовые задачи

I тип (общего типа)

1. В трех поселках 6 000 жителей. Во втором поселке вдвое больше жителей, чем в первом, а в третьем — на 400 жителей меньше, чем во втором. Сколько жителей во втором поселке?

2. В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, на второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

3. В трех коробках находится 119 карандашей. В первой коробке на 4 карандаша больше, чем во второй, и на 3 карандаша меньше, чем в третьей. Сколько карандашей в каждой коробке?

4. Отцу 30 лет, а сыну 4 года. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

5. В треугольнике первый угол больше второго в 2 раза, а третий угол больше второго на 40°. Чему равны углы треугольника?

6. Бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 27 деталей, бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но еще изготовила дополнительно 54 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

7. Одно число больше другого в 1,5 раза, среднее арифметическое этих двух чисел равно 30. Найти эти числа.

8. Первое число в 2,4 раза больше третьего, а второе число на 0,6 больше третьего числа. Найдите эти три числа, если их среднее арифметическое равно 2,4.

9. Второе число на 0,8 больше первого, а третье в 3,2 раза больше первого. Найдите эти три числа, если их среднее арифметическое равно 4,6.

II тип (задачи на движение по реке)

1. За 6 ч катер проходит по течению на 20 км меньше, чем за 10 ч против течения. Какова скорость течения, если скорость катера в стоячей воде 15 км/ч.

2. Расстояние по реке между пунктами A и B равно 41 км. Из пункта A в пункт B по течению плывет моторная лодка, собственная скорость которой равна 18 км/ч, а из B в A движется вторая моторная лодка, собственная скорость которой равна 16 км/ч. При встрече оказалось, что первая лодка плыла 1 ч, а вторая 1,5 ч. Найдите скорость течения реки.

3. Из двух пунктов реки, расстояние между которыми равно 80 км, одновременно навстречу друг другу вышли две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Через 2 ч они встретились. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

4. Из двух пунктов реки одновременно навстречу друг другу вышли две моторные лодки. Через 1,2 ч они встретились. Собственная скорость лодки, которая шла по течению реки, равна 18 км/ч, а лодка, которая шла против течения реки, имела скорость 16 км/ч. До встречи одна лодка прошла на 9,6 км больше другой. Найдите скорость течения реки.

5. Из двух пунктов реки навстречу друг другу движутся две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Скорость течения реки равна 2 км/ч. До встречи лодка, идущая по течению, шла 0,9 ч, а другая лодка шла 1 ч. Найдите собственную скорость лодок, если лодка, идущая по течению, прошла на 2 км больше, чем другая лодка.

III тип (задачи на движение)

1. Из двух аэропортов, расстояние между которыми равно 1300 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета: один — с поршневым, другой — с реактивным двигателем. Через 30 мин им оставалось пролететь до встречи 800 км. Найдите скорость самолета с реактивным двигателем, если она в 3 раза больше скорости самолета с поршневым двигателем.

2. Расстояние между двумя пунктами поезд проходит по расписанию с намеченной скоростью за 5 ч. Через 3 ч после отправления он был задержан на 15 мин в пути. Поэтому, чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, поезд увеличил скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

3. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно 10 км, одновременно в одном направлении выехали велосипедист и мотоциклист, причем мотоциклист все время шел впереди велосипедиста. Через $\frac{2}{3}$ ч расстояние между ними было 30 км. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что она в 3 раза больше скорости велосипедиста.

4. Сергей доехал на велосипеде от озера до деревни и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От озера до деревни он ехал со скоростью 15 км/ч, а на обратном пути его скорость была 10 км/ч. Чему равно расстояние от озера до деревни?

5. От города до поселка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то проехал бы это расстояние за 2 ч. С какой скоростью ехал автомобиль и чему равно расстояние от поселка до города?

6. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух поселков и встретились через 3 ч. Расстояние между поселками 30 км. Найдите скорость каждого пешехода, если у одного она на 2 км/ч меньше, чем у другого.

7. На первом участке пути поезд шел 2 ч со скоростью 60 км/ч, а на втором он шел 3 ч. С какой скоростью шел поезд на втором участке, если его средняя скорость на двух участках была равна 51 км/ч?

8. Автомобиль двигался 3,2 ч по шоссе со скоростью 90 км/ч, затем 1,5 ч по грунтовой дороге со скоростью 45 км/ч, наконец, 0,3 ч по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всем пути.

IV тип (задачи на части и проценты)

1. Две бригады лесорубов заготовили в январе 900 м^3 древесины. В феврале первая бригада заготовила на 15 %, а вторая — на 12 % больше, чем в январе. Известно, что в феврале они заготовили 1020 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины заготовила каждая бригада в январе?

2. Сумма двух чисел равна 400. Если первое число уменьшить на 20 %, а второе на 15 %, то сумма полученных чисел уменьшится на 68. Найдите значение чисел после их уменьшения.

3. Кооператив продавал пальто и куртки. Куртка стоила на 150 руб. дешевле пальто. На сезонной распродаже цена на куртки была снижена на 20 %, а на пальто — 10 %, и теперь куртку и пальто можно купить за 645 руб. Сколько стоила куртка и пальто до распродажи?

4. Смешали 1 г 13 %-го раствора соли и 1 г раствора той же соли с неизвестным содержанием соли, получили 20 %-ный раствор. Определить процентное содержание соли во втором растворе.

5. Рабочие отремонтировали дорогу длиной 820 м за 3 дня. Во вторник они отремонтировали $\frac{2}{5}$ этой дороги, а в среду — $\frac{2}{3}$ оставшейся части. Сколько метров дороги отремонтировали рабочие во вторник, среду, четверг?

6. Никита истратил $\frac{3}{7}$ своих денег на покупку книги и $\frac{5}{14}$ своих денег на покупку альбома. Сколько денег было у Никиты, если альбом дешевле книги на 7 руб.

V тип (задачи на составление системы уравнений)

1. Ученик за 3 общие тетради и 2 карандаша уплатил 66 руб. Другой ученик за такие же 2 общие тетради и 2 карандаша уплатил 46 руб. Сколько стоила общая тетрадь и сколько стоил карандаш?

2. На туристической базе имеются палатки и домики; всего их 25. В каждом домике живут 4 человека, а в каждой палатке 2 человека. Сколько на туристической базе палаток и домиков, если там отдыхает 70 человек?

3. У причала находилось 6 лодок, часть из которых была 2-местными, а часть 3-местными. Всего в эти лодки может поместиться 14 человек. Сколько 2-местных и сколько 3-местных лодок было у причала?

4. За 3 м одной ткани и за 3 м другой ткани заплатили 90 руб. Сколько стоит 1 м каждой ткани, если 9 м первой стоят столько же, сколько 6 м — второй?

5. По течению реки моторная лодка проходит 40 км за 2 ч, а против течения проходит 35 км за 2 ч 30 мин. Найти скорость течения реки.

6. Для клуба приобрели 10 комплектов шахмат и 16 комплектов шашек на сумму 11 000 руб. Сколько стоит один комплект шахмат и один комплект шашек, если 4 комплекта шашек стоят на 220 руб. дешевле, чем 3 комплекта шахмат?

7. За три пары лыж и четыре пары коньков уплатили 4 700 руб. Сколько стоит пара лыж и сколько пара коньков, если две пары коньков дороже одной пары лыж на 100 руб.?

VI тип (задачи на работу)

1. Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если первая бригада будет работать 3 дня, а вторая — 12 дней, то они выполнят 75 % всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая каждая бригада, работая отдельно?

2. Бассейн наполняется одной трубой за a часов, другой — за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если две трубы открыть одновременно?

3. Две машинистки, работая вместе, напечатали рукопись за a часов. Одна из них могла бы выполнить эту работу за b часов. За какое время могла бы напечатать рукопись другая машинистка?

VII тип (задачи повышенной сложности)

1. Длина садового участка на 10 м больше его ширины. Его площадь решили увеличить на 400 м^2. Для этого длину увеличили на 10 м, а ширину — на 2 м. Найдите площадь нового участка.

2. Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если эти цифры поменять местами, то получится число, которое на 27 меньше исходного. Найдите эти числа.

3. Длина окружности переднего колеса кареты равна 3 м, а заднего — 4,5 м. Какое расстояние проехала карета, если переднее колесо сделало на 20 оборотов больше заднего?

Раздел VII. Степени

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},$$

где a — основание степени, n — показатель степени.

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a:

$$a^1 = a.$$

Свойства степеней:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad m > n, \ a \neq 0;$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0;$$

$$b^0 = 1.$$

Вычислить.

1. $\dfrac{2^{10}\cdot\left(7^2\right)^4}{14^7}$.

2. $\dfrac{\left(5^5\right)^2\cdot\left(5^2\right)^5\cdot 5}{625}$.

3. $\dfrac{81\cdot 27^5}{3^9}$.

4. $\dfrac{\left(a^2\right)^3\cdot a^5\cdot\left(b^3\right)^3\cdot b^7}{\left(a^5\right)^2\cdot\left(b^2\right)^2}$.

5. $\dfrac{\left(x^2\right)^7\cdot\left(x^2\right)^2\cdot x^3\left(b^4\right)^2}{x^7\cdot\left(x^2\right)^3\cdot b}+b^0$.

6. $\dfrac{\left(z^3\right)^{11}\cdot z^2\cdot z^5}{z^7\cdot\left(z^2\right)^3\cdot z^{11}}-z^0$.

7. $\dfrac{\dfrac{\left(x^2\right)^3\cdot\left(x^7\right)^2\cdot x^3\cdot x^8}{x\cdot\left(x^5\right)^3\cdot x^2}}{x^{13}}$.

8. $\dfrac{\left(x^{10}\right)^2\cdot x\cdot\left(x^3\right)^7}{\dfrac{\left(x^6\right)^2\cdot x^3\cdot\left(x^4\right)^3\cdot x^5}{x^2}}$.

9. $\dfrac{a^{2n-1}\cdot a^5\cdot a^{2n}}{a\cdot a^{4n+1}}$.

10. $\dfrac{\left(b^2\right)^3\cdot b^{3n-2}\cdot b^{3n}}{b^{6n}\cdot\left(b^2\right)^2}$.

11. $\dfrac{\left(c^2\right)^4\cdot c^{5n-1}\cdot c^3}{c^{5n+7}\cdot c}$.

12. $\dfrac{\left(z^3\right)^2\cdot z^{2n+5}\cdot\left(z^0\right)^{25}}{z^{2n}\cdot z^7}$.

13. $\dfrac{\left(x^2\right)^n\cdot\left(x^3\right)^2\cdot x^5}{x^{2n+3}\cdot x^4}$.

14. $\dfrac{3^n\cdot 2^{2n}\cdot\left(3^2\right)^6\cdot 2^5}{\left(2^n\right)^2\cdot 2^3\cdot 3^{n+11}}$.

15. $\dfrac{36^2\cdot 2^{n+1}\cdot 3^{2n}}{2^n\cdot 9^n}$.

16. $\dfrac{100\cdot 2^n\cdot\left(5^2\right)^n}{2^{n-2}\cdot 5^{2n+1}}$.

17. $\dfrac{15^n\cdot 3^2\cdot\left(5^{n+1}\right)^2}{3^n\cdot\left(5^n\right)^3\cdot 3\cdot 5}$.

18. $\dfrac{147\cdot\left(7^n\right)^2\cdot 9^n\cdot 3^2}{3^{2n+2}\cdot 7^{2n+1}}$.

19. $\dfrac{\left(7^n\right)^2\cdot 147\cdot 9^n\cdot 3^5}{49^n\cdot 27\cdot\left(3^2\right)^n\cdot 7^3}$.

20. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\cdot b^3\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}\right)\cdot\left(b^n\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{a}\right)^7\cdot\left(b^2\right)^3\cdot b^n}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n+5}\cdot\left(b^3\right)^{n+1}}$.

21. $\dfrac{(0{,}7)^5\cdot 2^n\cdot 8\cdot\left(\dfrac{7}{10}\right)^3\cdot\dfrac{49}{100}}{2^{n+1}\cdot(0{,}7)^9}$.

22. $\dfrac{1{,}5^n\cdot 1{,}5^{n+3}\cdot 2^3\cdot 1{,}5^2\cdot 2^{2n}}{1{,}5^{2n+3}\cdot 2^{2n+1}}$.

23. $\dfrac{\dfrac{1}{3^2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\cdot 2^{n+1}}{2^{n-1}\cdot\dfrac{1}{27}}$.

24. $\dfrac{\dfrac{1}{8}\cdot 2^n\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2^3}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot 2^{n-1}}$.

25. $\dfrac{625\cdot(18)^2\cdot 3^3\cdot 150}{5^2\cdot 3^6\cdot 2^2}$.

26. $\dfrac{72\cdot 150\cdot 27}{2^3\cdot 3^3\cdot 5}$.

27. $\dfrac{28\cdot 98\cdot 75}{7^3\cdot 20}$.

28. $\dfrac{49\cdot 32\cdot 300\cdot 125}{21\cdot 2^6\cdot 5^4}$.

29. $\dfrac{18^2\cdot 9^3\cdot 12^2}{15^2\cdot 2^8\cdot 3^{10}}$.

30. $\dfrac{6^n \cdot 2^2 \cdot \left(3^{n+2}\right)^3}{27^n \cdot 3^{n+5} \cdot 2^{n-1}}$.

31. $\dfrac{8^k \cdot 27^k \cdot \left(5^{k+1}\right)^2}{25^k \cdot 5 \cdot \left(2^{k-1}\right)^2 \cdot 3^{3k} \cdot 2^k}$.

32. $\dfrac{75 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^3}{3^4 \cdot 2^2 \cdot 5^3}$.

33. $\dfrac{150 \cdot 75 \cdot 16 \cdot 27}{2^5 \cdot \left(5^2\right)^2 \cdot 3^3}$.

34. $\dfrac{3^{4n+3} \cdot 3^{3n-2}}{3^{2n-1}}$.

35. $\dfrac{a^{7y-5} \cdot a^{3y+2}}{a^{5y-3}}$.

36. $\dfrac{2 \cdot 5^{22} - 9 \cdot 5^{21}}{25^{10}}$.

37. $\dfrac{\left(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}\right) \cdot 57}{\left(19 \cdot 27^4\right)^2}$.

38. 1) $\dfrac{38^2 - 17^2}{47^2 - 19^2}$; 2) $\dfrac{47^2 - 3^2}{27^2 + 2 \cdot 27 \cdot 13 + 13^2}$.

39. $\left(12 \cdot 5^{2n+1} - 8 \cdot 5^{2n} + 4 \cdot 5^{2n-1}\right) : \left(4 \cdot 5^{2n-2}\right)$.

40. $\left(7^2 \cdot 2^2 \cdot 3^{2n+1} + 2^5 \cdot 7 \cdot 3^{2n-1}\right) : \left(14 \cdot 3^{2n-1}\right)$.

Раздел VIII. Одночлены, многочлены. Разложение многочленов на множители

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(b-a)^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Разложить на множители.

1. $2x^2y^4 - 2x^4y^2 + 6x^3y^3$.

2. $4a^2b^2 + 36a^2b^3 + 6ab^4$.

3. $4b^2 + 8ab - 12a^2b$.

4. $(x-y)+b(y-x)$.

5. $a^2(x-2)+b^2(2-x)$.

6. $a(b-3)+(3-b)-b(3-b)$.

7. $3m(n-m)^2 - 9m^2(m-n)$.

8. $a(a-b)^2 - (b-a)^3$.

9. $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$.

10. $ax^2 - ay - bx^2 + cy + by - cx^2$.

11. $x^2 + 3x + 2$.

12. $a^4 + 2a^3 + 1$.

13. $2a^4 - a^2 - 1$.

14. $m^3 - 12m^2 + 48m - 64$.

15. $1 - a^2 - 2ab - b^2$.

16. $x^4 + x^3 + x + 1$.

17. $x^3y^3 + 64$.

18. $(a+b)^3 - (a-b)^3 - 8b^3$.

19. $(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2(x^2+y^2)$.

20. $4a^2b^2(a^2+b^2) - (a^2+b^2)^3$.

21. $20x^5y^4 - 5x^3y^2$.

22. $(a+3b)^2 - (3a+b)^2$.

23. $9a^4 - 13a^2b^2 + 4b^4$.

24. $3x + xy^2 - x^2y - 3y$.

25. $x - y - 3x^2 + 3y^2$.

26. $a - 3b + 9b^2 - a^2$.

27. $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

28. $3a^2 + 12b^2 + 12ab - 12$.

29. $ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x$.

30. $1 - x^2 + 2xy - y^2$.

Раздел IX. Понятие о функции и графике функции

Зависимость между переменными y и x называют функциональной (или функцией) и обозначают $y(x)$. При этом x называют независимой переменной, а y — зависимой переменной.

Функция может быть задана с помощью формулы, таблицы или графика.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Графиком функции $y = kx$ при любом значении k является прямая, проходящая через начало координат. Если значения x, y положительны и $k > 0$, то зависимость вида $y = kx$ называют прямой пропорциональной зависимостью, а k — коэффициентом пропорциональности.

Кроме прямой пропорциональной зависимости существует обратная пропорциональная зависимость y от x. В этом случае при увеличении значения x в несколько раз значение y уменьшается во столько же раз. Обратная пропорциональная зависимость выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$.

Функция вида $y = kx + b$, где b и k — заданные числа, называется линейной функцией. Графиком линейной функции является прямая. Линейная функция строится по двум точкам или путем сдвига графика $y = kx$ на b единиц вдоль оси ординат.

Для исследования линейной функции удобно находить точки пересечения графика с осями координат.

Построить графики.

1. Построить графики по точкам:

1) $y = -3x + 1$;
2) $y = 2{,}5x + 5$;
3) $y = -\frac{1}{3}x - 2$;
4) $y = 4x - 0{,}5$;
5) $2y = x + 3$;
6) $3y - 2x = -1$;
7) $y = 7$;
8) $x = -2$;
9) $y = x$;
10) $y = -1$;
11) $x = 1{,}7$;

2. Построение графиков по точкам и путем сдвига по осям:

1) $y = 3x - \frac{1}{2}$;
2) $y = 2x - 5$;
3) $y = 3 - 2x$;
4) $y = -4 - x$;

5) $y=1+x$;

6) $y=1-x$;

7) $y=-1-x$;

8) $y=-1+x$;

9) $y=4x+3$;

10) $y=-5x+1$.

11) $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$;

12) $y=1\frac{1}{2}x+3$;

13) $y=-2\frac{1}{3}x-1$;

14) $2y=3x-5$;

15) $3y=x-6$;

3. Построение графиков по точкам пересечения графиков с осями координат:

1) $y = -4{,}5x + 1$;

2) $y = 0{,}6x + 0{,}5$;

3) $y = -2{,}5x - 5$;

4) $y = -6x + 2$;

5) $y = 2x + 2$.

4. Построить графики:

1) $y = |x| - 1$;

2) $y = |x|$;

3) $y = 5 - 2|x|$;

4) $y + 3 = -|x|$;

5) $y - |x| = 0{,}5$;

6) $y=|x|+1$;

7) $y=-1-|x|$;

8) $y=1-3|x-1|$;

9) $y=2|x-1|$;

10) $y=5|x+1|-1$;

11) $y=3-|x|$;

12) $y=4|x-2|+1$;

13) $y=-3+|x-5|$;

14) $y=3|x|-2$;

15) $y=|x-7|$;

16) $y=-2|x+2|-1$;

17) $y=|3-x|$;

18) $y=3|x+2|-4$;

19) $y=-|x|-7$;

20) $y=|x-1|+1$;

21) $y=5|x|+6$;

22) $y=2-|x|$;

23) $y=|x|-2$;

24) $y=|2x+1|-1$;

25) $y=\left|1+2x\right|$;

26) $y=\left|3x-2\right|-3$;

27) $y=\left|2-5x\right|$;

28) $y=\begin{cases}3+x & \text{при } x<0,\\ 3-x & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$

29) $y=\begin{cases}-2x-1 & \text{при } x<0,\\ 2x-1 & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$

30) $y=\begin{cases}-2x & \text{при } x<-3,\\ 6 & \text{при } -3\le x\le 4,\\ 2x-2 & \text{при } x\ge 4;\end{cases}$

31) $y=\begin{cases}x+1 & \text{при } x<0,\\ 1-x & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$

32) $y=\begin{cases}x+2 & \text{при } x\ge 0,\\ 2-x & \text{при } x<0;\end{cases}$

33) $y=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{при } x<-2,\\ 1 & \text{при } -2\le x<1,\\ 3x-2 & \text{при } x\ge 1;\end{cases}$

34) $y=\begin{cases}2x+4 & \text{при } x<-1,\\ 2 & \text{при } -1\le x<2,\\ 3-\dfrac{x}{2} & \text{при } x\ge 2;\end{cases}$

35) $y=\begin{cases}\left|x\right| & \text{при } x<0,\\ 2x & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$

36) $y=\begin{cases}\left|x\right|+1 & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$

37) $y=\begin{cases}-\left|x\right|+1 & \text{при } x\ge 0,\\ 1 & \text{при } x<0;\end{cases}$

38) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x-2}$;

39) $y=\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$;

40) $xy=3x^2-x$.

5. Построить графики, используя формулы сокращенного умножения:

1) $y=(3x-1)^2-(2x+1)^2-5x^2+4x$;

2) $y=(7x+2)^2+(x-3)^2-50x^2-18x-11$;

3) $y=(x-7)^2-(x+5)^2+20x-19$;

4) $y=(2x+1)^2+(2x-1)^2-8x^2$;

5) $y=(3x+2)^2-(3x-2)^2-21x-2$;

6) $y=(x+4)^2-(x+3)^2-5$;

7) $y=(4x+1)^2-(3x+2)^2-7x^2$;

8) $y=(5x-3)^2-(3x+1)^2-16(x-1)^2$;

9) $y=(7x-1)^2-(3x+1)^2-40x^2+17x+2$;

10) $y=(5x+1)^2-8x^2-(2x-1)^2-12x^2-(x+1)^2-8x$;

11) $y=(3x+2)^2-(2x+1)^2-(2x-1)^2-(x+3)^2$;

12) $y=(x-1)^3-(x+2)^3+(3x+2)^2+7$;

13) $y=(3+x)^3-(2x-1)^3+7x^3-(4x+3)^2-5x^2-14$;

14) $y=(x+2)^3-(x-2)^3-12x^2-11$;

15) $y=(2x-1)^3+(x+2)^3+(3x-2)^2-9x^3-3x^2-10$.

6. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 10x - 8$ и $y = -3x + 5$;

2) $y = 5x + 16$ и $y = -6$;

3) $y = 4x + 9$ и $y = 6x - 5$;

4) $y = 0{,}1x$ и $y = 14$;

5) $y = 14x$ и $y = x + 26$.

7. Пересекаются ли графики функций:

1) $y = x$ и $y = -3x + 3{,}6$;

2) $y = -6x + 9$ и $y = 2x - 7$;

3) $y = 0{,}2x - 9$ и $y=\frac{1}{5}x + 1$?

8. Найти *k* и *b*, если график линейной функции проходит через точки (–1, 2) и (2, 1). Задайте формулой линейную функцию.

9. График линейной функции $y = kx + b$ проходит через точку *A* (2, 1), а угловой коэффициент этой прямой равен 0,5. Задайте данную линейную функцию формулой и постройте ее график.

10. Постройте графики и исследуйте, при каких значения x функция больше нуля (положительна), меньше (отрицательна) и равна нулю:

1) $y = -3{,}5x + 1{,}5$;
2) $y = -0{,}5x + 5$;
3) $y = 2x - 0{,}5$;
4) $y = 5x+1$;
5) $y = 5x - \frac{1}{3}$;
6) $y = 4x + 1$;
7) $y = -2\text{x} - 4$.

Раздел X. Системы уравнений

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называют такую пару чисел x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или установить, что их нет. Существует три способа решения системы уравнений: подстановки, сложения и графический.

При решении способом подстановки необходимо:

• из одного уравнения системы (все равно из какого) выразить одно неизвестное через другое, например, y через x;

• полученное выражение подставить в другое уравнение системы и получить одно уравнение с одним неизвестным;

• решив это уравнение, найти x;

• подставив найденное значение x в выражение для y, найти значение y.

При решении системы уравнений способом алгебраического сложения необходимо:

• уравнять значения при одном из неизвестных, умножая или деля каждое из уравнений на необходимые коэффициенты;

• складывая или вычитая полученные уравнения, получить одно уравнение с одним неизвестным;

• найти первое неизвестное;

• подставляя найденное значение в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

При решении системы уравнений графическим способом необходимо:

• построить графики каждого из уравнений системы;

• найти координаты точки или точек пересечения построенных прямых или установить, что прямые не пересекаются;

• если прямые параллельны, то система решений не имеет;

• если прямые совпадают, то система имеет бесконечное множество решений;

• если прямые имеют одну общую точку, то ее координаты являются решением системы уравнений.

При решении графическим методом находится приближенное значение неизвестных. Чтобы найти точное решение системы уравнений необходима проверка, которая подтвердит верное равенство ее уравнений.

Решить системы уравнений.

I тип

1. $\begin{cases} x - y = 2; \\ 3x - 2y = 9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ 5x + y = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y = 11; \\ 5x - 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y - 3x = -5; \\ 2y + 5x = 23. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 5y = 7; \\ x - 3y = -1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 3y = -5; \\ 3x + 2y = 5{,}5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 2y = 5; \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 2y = 10; \\ 5x + 3y = 12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + 3y = 12; \\ 3x + 2y = 13. \end{cases}$

10. $\begin{cases} (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1); \\ (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4). \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - 5y = -7; \\ x - 3y = -5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - 3y = 1; \\ 3x + y = 7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y = 7; \\ x + 2y = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 4y = 7; \\ x - 2y = -5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x - 8y = 22; \\ 7x + 8y = 78. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 15x - 8y = 2; \\ 5x + 3y = 63. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x-3y=7; \\ 5x+2y=26. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x-7y=1; \\ 4x+3y=31. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 14x+5z=14{,}5; \\ 3x+4z=3{,}4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 35x-3y=5; \\ 49x-4y=9. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5(x+2y)-3=x+5; \\ 4(x-3y)-50=-y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5(x-3y)-26=2x+1; \\ 3(x-6y)+4=9y+19. \end{cases}$

II тип

1. $\begin{cases} \dfrac{x+5y}{2}+\dfrac{11x-2y}{8}=\dfrac{2x-4y+6}{5}; \\ \dfrac{2x-3y}{7}-\dfrac{y-2x}{5}=\dfrac{2(9x+7y)}{11}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{4}y=0; \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{3}{5}y=8{,}8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x-\dfrac{2}{5}y=3{,}6; \\ \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{3}y=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x-6}{2}-\dfrac{y+1}{3}=1; \\ \dfrac{2-y}{4}+\dfrac{x-1}{2}=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{5}+\dfrac{4-y}{2}=3; \\ \dfrac{3-y}{2}-\dfrac{5+x}{6}=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}; \\ \dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+3y=13; \\ y=\dfrac{13-2x}{3}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x+8y=-1; \\ x+2\dfrac{2}{3}y=5. \end{cases}$

III тип

1. $\begin{cases} x^2-y^2=5; \\ x+y=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2-y^2=3; \\ x-y=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases}(7x+y)^2=-x+3y;\\ 7x+y=-2.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2-y^2=5;\\ x-y=-1.\end{cases}$

5. $\begin{cases}(2x+y)^2=2(2x-y);\\ 2x+y=2.\end{cases}$

6. $\begin{cases}(3x-y)(3x+y)=45;\\ 3x+y=3.\end{cases}$

7. $\begin{cases}(3x+5y)^2=x+2y;\\ 5y+3x=3.\end{cases}$

8. $\begin{cases}(x-7y)^2=y+2x;\\ x-7y=5.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=2y-3x;\\ x-y=-2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x-y=4;\\ x^2-y^2=40.\end{cases}$

11. $\begin{cases}9x^2-12xy+4y^2=5x-2y;\\ 3x-2y=-3.\end{cases}$

12. $\begin{cases}x^2+y^2-2xy=-x+6y;\\ x-y=1.\end{cases}$

13. $\begin{cases}4x^2-28xy+49y^2=5x+2y;\\ 2x-7y=2.\end{cases}$

14. $\begin{cases}(2x+3y)^2=-3x+y;\\ 2x=4-3y.\end{cases}$

15. $\begin{cases}x^2-y^2=5;\\ x+y=-1.\end{cases}$

16. $\begin{cases}x^2-y^2=3;\\ x-y=3.\end{cases}$

17. $\begin{cases}x^2-6xy+9y^2=x-y;\\ x-3y=-1.\end{cases}$

18. $\begin{cases}x^2+4xy+4y^2=-x-6y;\\ x+2y=1.\end{cases}$

19. $\begin{cases}4x^2+12xy+9y^2=3x+2y;\\ 2x+3y=1.\end{cases}$

20. $\begin{cases}(x+5y)^2=2x-y;\\ x+5y=3.\end{cases}$

21. $\begin{cases}x^2-4xy+4y^2=5x-y;\\ x-2y=2.\end{cases}$

22. $\begin{cases}(x-y)^2=10x-11y;\\ x-y=1.\end{cases}$

Ответы

Раздел I. Арифметические примеры

1. $-0{,}325=-\frac{13}{40}$.

2. $-\frac{9}{28}$.

3. $-\frac{5}{9}$.

4. $\frac{3}{10}=0{,}3$.

5. $\frac{1}{4}$.

6. $\frac{73}{210}$.

7. 83,244.

8. 37,4.

9. $\frac{1}{3}$.

10. 1.

11. –20.

12. $-3\frac{1}{4}$.

13. 1,7.

14. $-0{,}75=-\frac{3}{4}$.

15. – 0,4.

16. 32.

17. 0,5.

18. 3.

19. 1.

20. 20.

21. $-1\frac{1}{9}$.

22. 16.

23. 5.

24. – 50.

25. – 0,05.

26. 1,25.

27. $-\frac{5}{9}$.

28. $-42\frac{2}{3}$.

29. $1\frac{17}{33}$.

30. $2\frac{2}{11}$.

31. $27\frac{7}{9}$.

Раздел II. Признаки делимости

3. 2.

5. Составное.

6. $3\underbrace{111\ldots11}_{\text{15 цифр}}0$; $7\underbrace{111\ldots11}_{\text{15 цифр}}5$

9. 3; 7.

10. Да, так как (5 + 8) –2 = 11.

Раздел IV. Пропорции

9. 1,6.
10. 2,5.
11. 6,75.
12. 10,25.
13. 19.
14. 2,5.
16. 3.
17. 1.
18. 5.

Раздел V. Уравнения

Тип I

1. $2\frac{1}{7}$.
2. $\frac{8}{17}$.
3. 44.
4. – 5.
5. $\frac{1}{3}$.
6. 21.
7. $1\frac{2}{3}$.
8. 0.
9. Корней нет.
10. Любое значение x является корнем уравнения.
11. Любое значение x является корнем уравнения.
12. Корней нет.
13. 0.
14. 3.
15. 5.
18. – 0,2.
19. 0,6.
20. $-6\frac{1}{8}=-6{,}125$.
21. 1,854.
22. 9,9.
23. 2,5.
24. 1, 625.
25. 0,05.
26. $\frac{1}{9}$.

Тип II

1. $0;\ 1\frac{1}{5}$.
2. $0;\ \frac{1}{8}$.
3. $0;\ 1;\ -\frac{1}{2};\ -1\frac{2}{3}$.
4. $\frac{1}{3};\ -\frac{2}{5};\ 0; -4$.
5. $1\frac{2}{5};\ -\frac{1}{4}$.
6. 1; –1.

7. $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.

8. $\frac{1}{4}$; $-1\frac{1}{4}$.

9. 0; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{3}$.

10. $\frac{5}{7}$; $1\frac{1}{2}$.

11. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$.

12. -4; 1.

13. 6; 8.

14. 1; 5.

15. 2; -6.

16. $1\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{3}$.

17. 7; 4.

18. 0; 8; 12.

19. $1\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$.

20. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

21. 2; -2.

22. -1; 0.

23. 5; 2; -2.

24. $1\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

25. $\frac{2}{3}$; -3.

26. 1; $-1\frac{1}{2}$.

27. -2; 5.

28. $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

29. $\frac{1}{2}$; 0.

30. $\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{14}$.

31. $-1\frac{2}{3}$; 1,5.

32. $2\frac{1}{3}$; -2.

33. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{4}$.

34. 2; -3.

35. $-\frac{1}{3}$; $-0,4$.

36. 1; 0.

37. $1\frac{1}{2}$; $-2\frac{2}{3}$.

38. $-2\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{3}$.

39. $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{43}$.

40. $-\frac{1}{9}$; $\frac{3}{23}$.

41. $\frac{5}{7}$; $-0,3$.

42. 0,5; $-0,4$.

43. 0,8; 1,55.

44. 0,45; 0,82.

45. $11\frac{2}{3}$; 0.

46. $\frac{3}{8}$; 1.

47. 2; 3.

Тип III

1. 1.

2. 2.

3. $-\frac{2}{3}$.

4. 1.

5. 1,1.

6. Уравнение не имеет корней.

7. $-\frac{5}{12}$.

8. 6.

9. $\frac{1}{3}$.

10. $1\frac{1}{6}$.

11. 1.

12. 1.

Тип IV

1. – 3; –17.

2. $-\frac{1}{5}$ (5 не удовлетворяет условию $x < -1\frac{1}{2}$).

3. 1; – 3.

4. 4; – 3.

5. 5; – 3.

6. 12; – 12.

11. $-\frac{1}{6}$ (6 не подходит по условию).

12. $-\frac{1}{11}$ (11 не подходит по условию).

13. $-\frac{1}{4}$ (4 не подходит по условию).

Тип V

1. $y_1 = 1$; $y_2 = 3$; $y_3 = -1$; $y_4 = -3$;
$x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -4$; $x_4 = -2$.

5. $a = 4$; $b = 5$.

8. $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = -4$;

$y_1 = 5$; $y_2 = 1$; $y_3 = -5$; $y_4 = -1$.

Тип VI

1. $\frac{1-a}{3}$,

a — любое число.

2. $\frac{24+a}{2}$,

a — любое число.

3. $\frac{8}{a} + 3$; $a \neq 0$.

4. $\frac{6}{a-2}$; $a \neq 2$.

5. $a \neq -1$.

6. $a \neq 0$.

7. $a \neq 8$.

8. $a \neq -7$.

9. $a \neq -1{,}2$.

10. $a \neq 2$.

11. $a_1 \neq 0$,

$a_2 \neq \frac{4}{7}$.

12. $a_1 \neq 0$,

$a_2 \neq 2\frac{3}{5}$.

13. $a_1 = 0$,

$a_2 = 8$,

Раздел VI. Задачи

Тип I

1. 2560.
2. 1100 — в первом элеваторе; 2200 — во втором.
3. В первой — 40; во второй — 36; в третьей — 43;
4. 9.
5. Первый угол — 70°; второй —35°; третий — 75°.
6. 72 детали.
8. 3,6; 2,1; 1,5.
9. 2,5; 3,3; 8.

Тип II

1. 2,5.

Тип III

1. 750 км/ч. **2.** 70 км/ч. **3.** 45 км/ч.

Тип IV

1. 500; 400 м^3. **4.** 27 %.

3. 300; 450 руб. **6.** 98.

Тип V

1. 20; 3. **6.** 540; 350 руб.

4. 18; 12. **7.** 900; 500 руб.

Тип VI

1. 12 дней; 24 дня. **2.** $\frac{ab}{a+b}$. **3.** $\frac{ab}{b-a}$.

Тип VII

1. 1600 м^2.

2. Исходное число 96. Обратное число 69.

3. 180 м.

Раздел VII. Степени

1. 56. **9.** a^2. **14.** 12.

2. 5^{17}. **10.** 1. **15.** 2592.

3. 3^{10}. **11.** c^2. **16.** 80.

7. 1. **12.** z^4. **17.** 15.

8. x^{12}. **13.** x^4. **18.** 21.

19. $3\frac{6}{7}$.

20. $\frac{b^6}{a^4}$.

21. 2,8.

22. 9.

23. $\frac{8}{81}$.

24. 8.

25. 11250.

26. 270.

27. 30.

28. 70.

29. 0,01.

30. 24.

31. 20.

32. 20.

33. 9.

34. 3^{5n+2}.

35. a^{5y}.

36. 5.

37. $\frac{1}{9}$.

38. 1) $\frac{5}{8}$; 2) $1\frac{3}{8}$.

39. 330.

40. 142.

Раздел VII. Одночлены, многочлены. Разложение многочлена на множители

5. $(x-2)(a-b)(a+b)$.

9. $(x-b+1)(y^2-a)$.

11. $(x+2)(x+1)$.

12. $(a+1)(a^3+a^2-a+1)$.

13. $(a-1)(a+1)(2a^2+1)$.

14. $(m-4)^3$.

15. $(1-a-b)(1+a+b)$.

16. $(x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

17. $(xy+4)(x^2y^2-4xy+16)$.

18. $6b(a-b)(a+b)$.

19. $(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)^2$.

20. $-(a^2+b^2)(a-b)^2(a+b)^2$.

21. $5x^2y^2(2xy-1)(2xy+1)$.

22. $8(b-a)(a+b)$.

23. $(3a^2-2b^2-ab)(3a^2-2b^2+ab)$.

24. $(x-y)(3-xy)$.

25. $(x-y)(1-3x-3y)$.

26. $(a-3b)(1-a-3b)$.

27. $a(a-b)(a+1)$.

28. $3(a+2b-2)(a+2b+2)$.

29. $(b^2-x)(a-y+1)$.

30. $(1-x+y)(1+x-y)$.

Раздел X. Системы уравнений

Тип I

1. (5; 3).
2. (1; – 1).
3. (3; 4).
4. (3; 4).
5. (2; 1).
6. (0,5; 2).
7. (– 1; – 3,5).
8. (– 6; 14).
9. (3; 2).
10. (7; 5).
11. (4; 3).
12. (2; 1).
13. (3; – 2).
14. (– 1; 2).
15. (10; 1).
16. (6; 11).
17. (4; 3).
18. (4; 5).
19. (1; 0,1).
20. (1; 10).
21. (7; – 2).
22. (14; 1).

Тип II

2. (6; – 8).
3. (8; 6).
4. (– 10; 28).
5. $\left(2\frac{4}{11}; -1\frac{5}{11}\right)$.
6. (3; 4).
7. Бесконечное множество решений.
8. Система не имеет решений.

Тип III

1. (– 3; 2).
2. (2; – 1).
3. $\left(-\frac{5}{11};\ 1\frac{2}{11}\right)$.
4. (– 3; – 2).
5. (1; 0).
6. (3; – 6).
7. (– 39; 24).
8. (12; 1).
9. (0; 2).
10. (7; 3).
11. (6; 10,5).
12. $\left(1\frac{2}{5};\ \frac{2}{5}\right)$.

13. $\left(\frac{32}{39};-\frac{2}{39}\right)$.

14. (– 4; 4).

15. (– 3; 2).

16. (2; – 1).

17. (2; 1).

18. $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$.

19. $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right)$.

20. $\left(4\frac{4}{11};\ -\frac{3}{11}\right)$.

21. $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.

22. (10; 9).

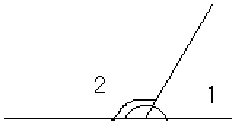
ГЕОМЕТРИЯ

Справочник по геометрии

1. Смежные углы.

Теорема. Сумма смежных углов равна 180°:

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

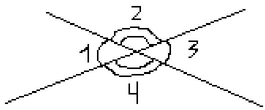


2. Вертикальные углы.

Теорема. Вертикальные углы равны.

$\angle 1 = \angle 3$;

$\angle 2 = \angle 4$.



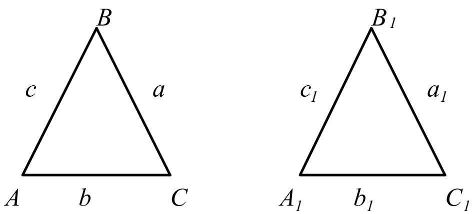
3. Равенство треугольников.

Признаки равенства треугольников:

1) $a_1 = a$; $b_1 = b$; $\angle C_1 = \angle C$;

2) $b_1 = b$; $\angle C_1 = \angle C$; $\angle A_1 = \angle A$;

3) $a_1 = a$; $b_1 = b$; $c_1 = c$.



4. Равенство прямоугольных треугольников.

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

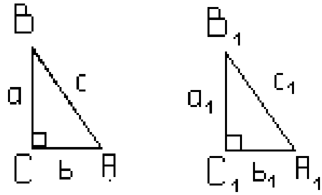
1) $\angle B_1 = \angle B$; $a_1 = a$;

2) $\angle B_1 = \angle B$; $c_1 = c$;

3) $a_1 = a$; $b_1 = b$;

4) $a_1 = a$; $c_1 = c$;

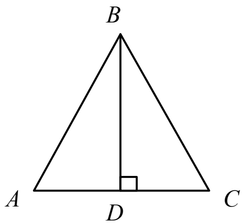
$\angle C_1 = \angle C = 90^\circ$.



5. Равнобедренный треугольник.

Определение. Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны.

$AB = BC$.



Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны:

$$\angle BAC = \angle BCA.$$

Теорема. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой:

$$BD \perp AC;$$

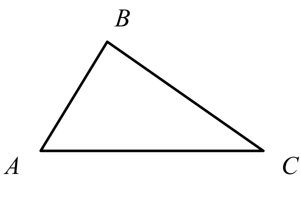
$$AD = DC;$$

$$\angle ABD = \angle DBC.$$

6. Сумма углов треугольника:

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.

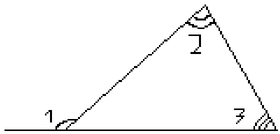
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.



7. Внешний угол треугольника.

Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних, не смежных с ним.

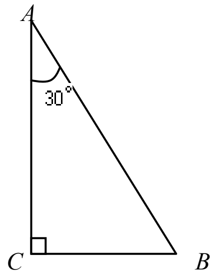
$$\angle 1 = \angle 2 + \angle 3.$$



8. Прямоугольный треугольник с углом 30°.

Теорема. В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы.

$$BC = \frac{AB}{2}.$$



9. Параллельные прямые.

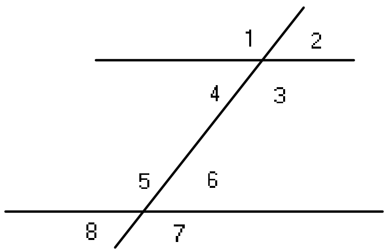
а) $\angle 4 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 5$ — внутренние накрест лежащие углы;

б) $\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$;

$\angle 4 = \angle 8$; $\angle 3 = \angle 7$ — соответственные углы;

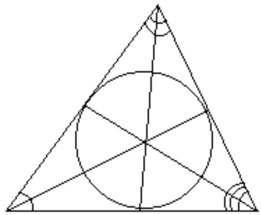
в) $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$;

$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ — внутренние односторонние углы.



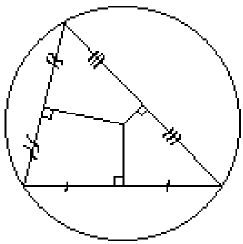
10. Вписанная окружность.

Теорема. Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис.



11. Описанная окружность.

Теорема. Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров.

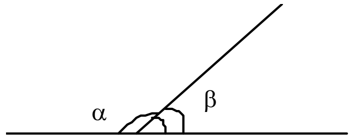


Задачи

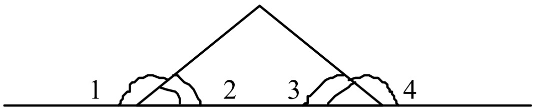
Раздел I. Смежные и вертикальные углы

1. Геометрия на готовых чертежах:

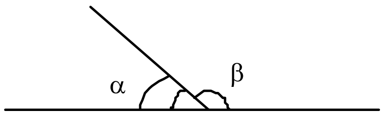
а) Дано: $\alpha - \beta = 30^{\circ}$.
Найти: α, β.



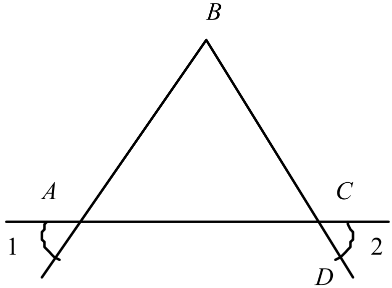
б) Дано: $\angle 1 = \angle 4$.
Доказать: $\angle 2 = \angle 3$.



в) Дано: $\alpha : \beta = 1 : 5$.
Найти: α, β.



г) Дано: $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать:
$\angle BAC + \angle ACD = 180^{\circ}$.



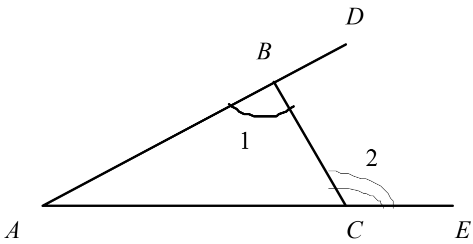
д) Дано:

$\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$.

Доказать:

1) $\angle ABC = \angle ACB$;

2) $\angle DBC = \angle BCE$.

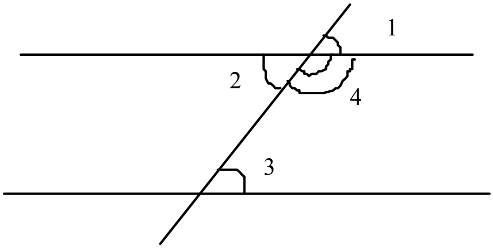


е) Дано: $\angle 2 = \angle 3$.

Доказать:

1) $\angle 1 = \angle 3$;

2) $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.



2. Из двух смежных углов один больше другого на 20°. Найти эти углы.

3. Градусные меры двух смежных углов относятся, как 2:7. Найти эти углы.

4. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 150°. Найти величины углов, образованных прямыми.

5. Из точки проведены шесть полупрямых: *OA*; *OB*; *OC*; *OD*; *OE*; *OF*, которые образуют углы:

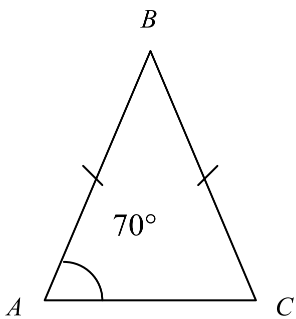
$\angle AOB = 38°$; $\angle BOC = 50°$; $\angle COD = 92°$; $\angle COE = 130°$; $\angle EOF = 12°$; $\angle EOA = 142°$. Какие углы являются вертикальными?

Раздел II. Равенство треугольников. Сумма углов треугольника

1. Геометрия на готовых чертежах.

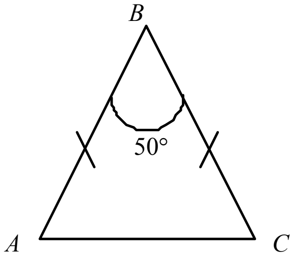
а) Дан треугольник *ABC*.

Найти неизвестные углы ΔABC.



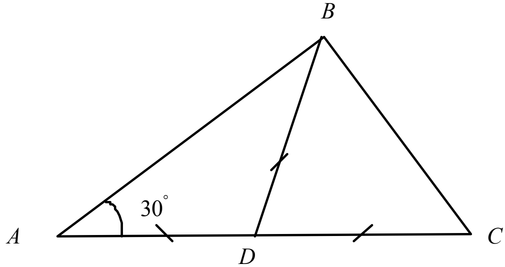
б) Дан треугольник ABC.

Найти неизвестные углы ΔABC.



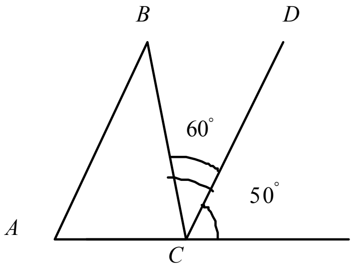
в) Дан треугольник ABC, BD — медиана.

Найти неизвестные углы ΔABC.



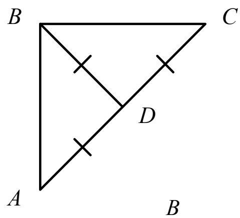
г) Дано: $AB \parallel CD$.

Найти неизвестные углы ΔABC.



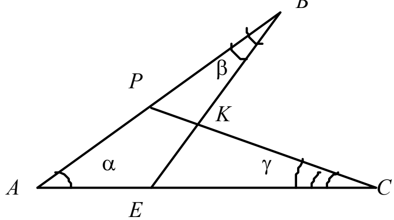
д) Дан треугольник ABC, BD — медиана.

Найти $\angle ABC$.



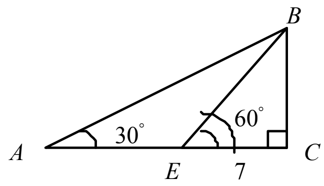
е) Дан рисунок.

Найти $\angle EKC$.



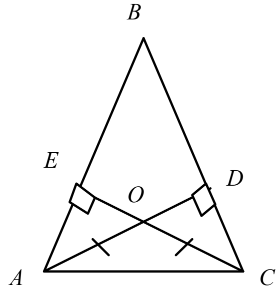
ж) Дано: прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle BEC = 60°$, $EC = 7$.

Найти AE.



з) Дано: треугольник ABC, $AB = BC$; $AO = OC$.

Доказать: $AD = CE$.



2. Один из углов треугольника равен 110°. Чему равны углы, образованные пересечением биссектрис, проведённых из двух других углов?

3. В треугольнике два угла относятся как 5:8, а третий угол больше самого меньшего угла на 18°. Найти углы треугольника.

4. В равностороннем треугольнике ABC на трёх сторонах взяты точки K, L, M так, что $AK = BL = CM$. Найти углы треугольника KLM.

5. Докажите равенство треугольников, если равны их основания и проведенные к ним высоты и медианы.

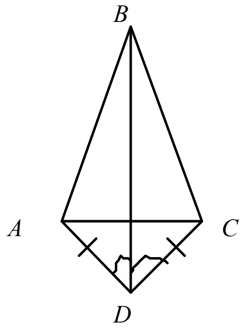
6. Докажите равенство треугольников по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

Раздел III. Равнобедренные треугольники

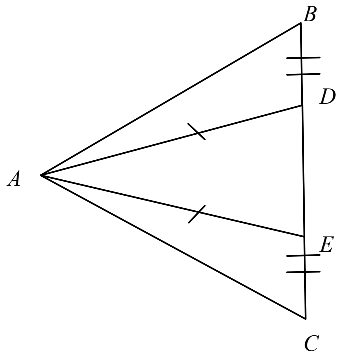
1. Геометрия на готовых чертежах.

Доказать, что ΔABC — равнобедренный.

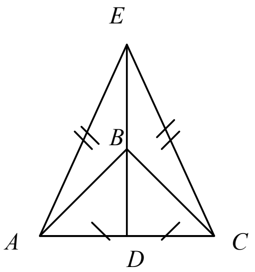
а)



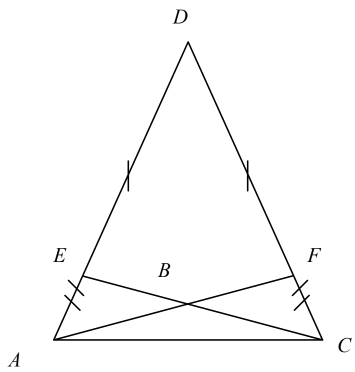
г)



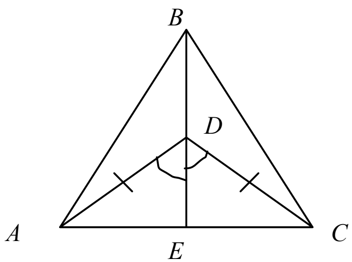
б)



д)



в)



2. Медиана, проведённая к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной 15 и 6 см. Определить стороны треугольника.

3. В треугольнике ABC известны стороны: AB = 10 см, а AC = = 14 см. На стороне AB взята точка M так, что $AM : MB = 2:3$, а на стороне AC — точка K, причем $AK : KC = 2:5$. В каком отношении биссектриса угла A делит отрезок MK?

4. В треугольнике ABC сторона $AB = 12$, а $BC = 9$; CN — медиана. Точка M делит отрезок BC в отношении $BM : MC = 2:1$. В каком отношении биссектриса BD делит отрезок NM.

5. В треугольнике ABC прямая CD делит угол ACB в отношении 1:2. Отрезки $AD = DC = CB$. Найти углы треугольника.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$; $BC = 6$; $CA = 7$. На сторонах AB, BC и CA взяты точки K, L и M так, что прямые KL, LM, MK перпендикулярны биссектрисам углов B, C, A соответственно. На какие отрезки делят точки K, L и M стороны треугольника ABC?

7. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC = 48 см, внешний угол при вершине $B = 60^0$. Найти расстояние от вершины C до прямой, содержащей AB.

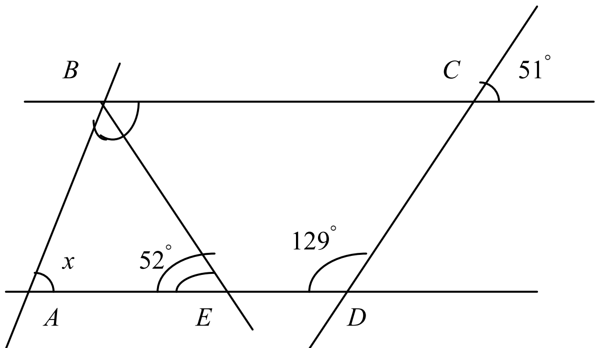
8. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины при основании, образует с противолежащей стороной углы, один из которых равен 60°. Найти углы этого треугольника. (Рассмотреть все варианты.)

Раздел IV. Признаки и свойства параллельных прямых

1. Геометрия на готовых чертежах.

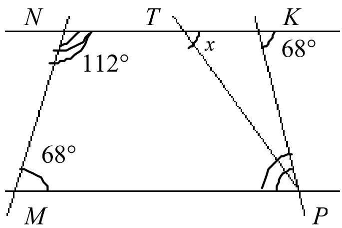
а) Дано:
$\angle ABE = \angle CBE$.

Найти: $\angle x$.



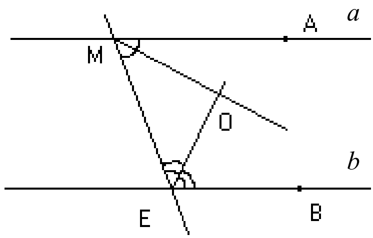
б) Дано: $\angle MPT = \angle TPK$.

Найти: $\angle x$.



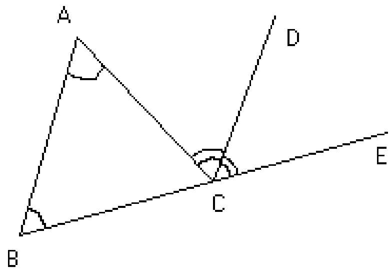
в) Дано: $a \parallel b$.

Доказать: $\angle MOE = 90°$.



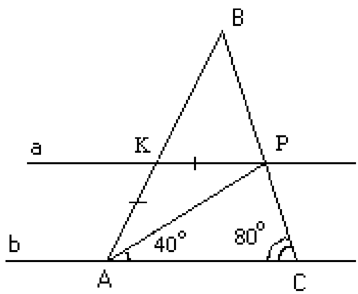
г) Дано:

Доказать: $AB \parallel CD$.



д) Дано: $AB = BC$.

Доказать: $a \parallel b$.



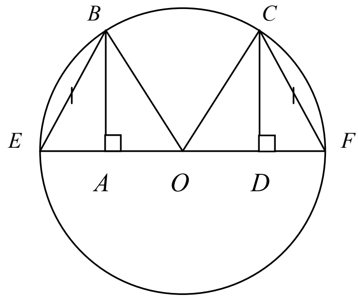
2. Параллельные прямые AB и CD пересечены прямой BD. Биссектрисы углов ABD и BDC пересекаются в точке K. Отрезок $BD = 2\,KD$. Найти углы, образованные секущей BD с прямыми AB и CD.

Раздел V. Окружность

1. Геометрия на готовых чертежах.

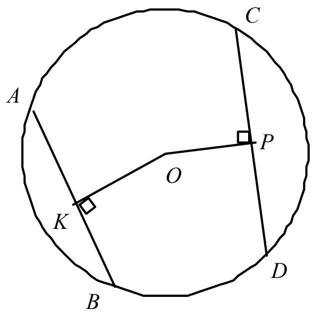
а) Дан рисунок.

Доказать: $CD = BA$.



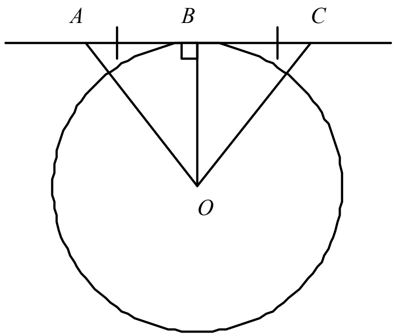
б) Дано: $AB = CD$.

Доказать: $OK = OP$.



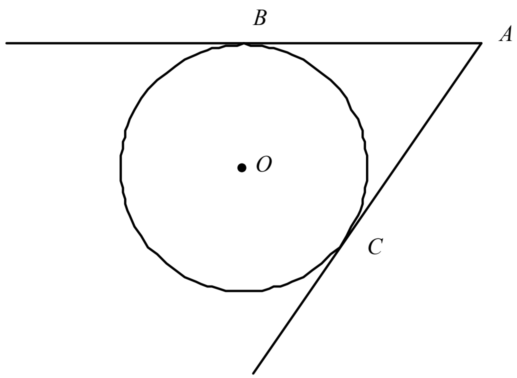
в) Дано: AC — касательная.

Доказать: $OA = OC$.



г) Дано:
AB и *AC* — касательные.

Доказать: $AB = AC$.



2. Даны две равные касающиеся окружности. Под каким углом пересекаются прямые, одна из которых касается этих окружностей в разных точках, а вторая проходит через центр одной из окружностей и касается другой?

3. В треугольник *ABC* вписана окружность. Касательные, проведённые к окружности отсекают от исходного треугольника три треугольника, содержащие вершины *A*, *B* и *C* соответственно. Найти периметры отсечённых треугольников, если стороны треугольника равны 9, 8, 7.

Раздел VI. Задачи на построение

1. Деление отрезка пополам.

2. Построение перпендикуляра к прямой из точки на прямой и из точки вне прямой.

3. Построение угла, равного данному.

4. Деление угла пополам.

5. Построение треугольника по трём заданным сторонам.

6. Построение прямой параллельной данной и проходящей через заданную точку.

7. Дан угол 19°. Как построить угол, равный 1°.

8. Дан угол 19°. Как построить луч, который делит этот угол на части 9 и 10°.

Раздел VII. Задачи на повторение

В этот раздел включены геометрические задачи, для решения которых надо применять различные теоремы, пройденные в 7-м классе. Эти задачи наиболее трудные и могут рассматриваться в конце учебного процесса и как дополнительные задачи. (Часть текстов приведённых задач взята из задачника И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин «Сборник задач из геометрии 5000 задач с ответами»).

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM. На ней взята точка D. Докажите равенство треугольников: а) ABD и CBD; б) AMD и CMD.

2. Отрезки AB и CD пересекаются под прямым углов и $AC =$ $= AD$. Докажите, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Точка их пересечения обозначена через D. Найти угол ADB, если: а) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$; б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; в) $\angle C = 130^\circ$ г) $\angle C = \gamma$.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC; CD — биссектриса угла С; $\angle ADC = 150^\circ$. Найти угол B.

5. В треугольнике известны величины углов A, B, C. Найдите углы шести треугольников, на которые данный треугольник разбивается его биссектрисами.

6. Прямая, проходящая через вершину A треуглльника ABC, пересекает сторону BC в точке M. При этом $BM =$ AB; $\angle BAM = 35^\circ$; $\angle CAM = 15^\circ$. Найти углы треугольника ABC.

7. Высоты треугольника ABC, приведённые из вершин A и C, пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.

8. В равнобедренном треугольнике ABC высоты AD и CE, опущенные на боковые стороны, образуют угол AMC, равный 48°. Найдите углы треугольника ABC.

9. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше угла при вершине, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что AD = BC.

10. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка K так, что $AK = AB$. Угол $ABK = 75^\circ$. Угол $ABC = 60^\circ$. Найти AC, если известно, что $BC = 3$.

11. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. На стороне AC взята точка D так, что $\angle ADB = 2\angle DBC$. Найти длину отрезка DC, если $AB = 5$.

12. В треугольнике ABC угол $A = \alpha$, угол $C = \beta$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины B: а) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 20^\circ$; б) $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 50^\circ$.

13. Параллельные прямые a и b пересечены секущей AB ($A \in a$; $B \in b$). Биссектрисы внутренних односторонних углов пересекаются в точке C. Через точку C проведена прямая параллельная a, которая пересекает AB в точке E. Найти длину отрезка CE, если $AB = 12$ см.

Ответы

Раздел I. Смежные и вертикальные углы

2. 80° и 100°.

3. 40° и 140°.

4. 75° и 105°.

5. $\angle BOA$ и $\angle DOE$;

$\angle AOE$ и $\angle BOD$.

Раздел II. Равенство треугольников Сумма углов треугольника

2. 145° и 35°. **3.** 45°, 63° и 72°. **4.** 60°.

Раздел III. Равнобедренные треугольники

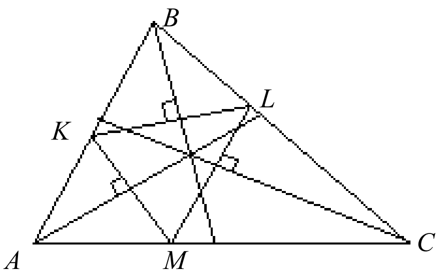
2. 10; 10; 1.

3. 1:1.

4. 1:1.

5. 30°; 60°; 90° и 40°; 60°; 80°.

6.



ΔLMC — равнобедренный (высота совпадает с биссектрисой);

$LC = MC = X \Rightarrow AM = 7 - X$; $BL = 6 - X$;

ΔBLK — равнобедренный;

$BL = BK = 6 - X \Rightarrow AK = 5 - (6 - X) = X - 1$;

ΔAKM — равнобедренный;

$AK = AM \Rightarrow X - 1 = 7 - X \Rightarrow X = 4$.

Ответ: $CL = CM = 4$; $BL = BK = 2$; $AM = AK = 3$.

$AB = 5$; $BC = 6$; $AC = 7$.

7. 24 см.

8. 1) 40°; 40°; 100°;

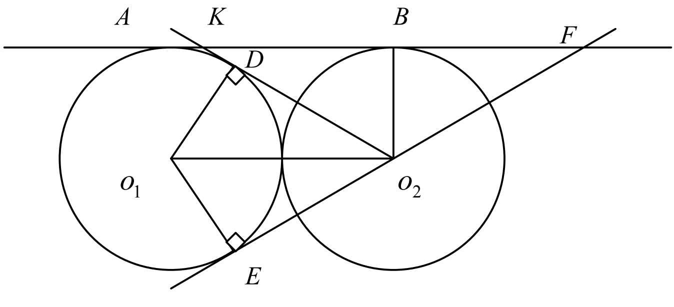
2) 80°; 80°; 20°.

Раздел IV. Признаки и свойства параллельных прямых

2. 60°; 120°.

Раздел V. Окружность

2.



$AO_1 = DO_1 = BO_2 = EO_1 = R$;

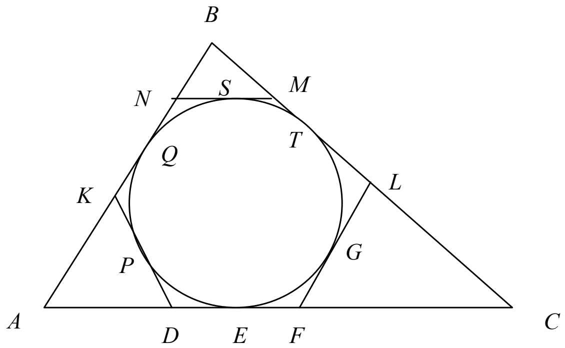
$O_1O_2 = 2R$.

Из ΔO_1O_2D ($\angle D = 90^\circ$; $O_1D = \frac{1}{2}O_1O_2$) находим $\angle DO_2O_1 = 30^\circ$.

Из ΔO_1O_2E ($\angle E = 90^\circ$; $O_1E = \frac{1}{2}O_1O_2$) находим $\angle EO_2O_1 = 30^\circ$.

$O_1O_2 \parallel AB$; $\angle O_1O_2K = \angle O_2KB = 30^\circ$ (внутренние накрест лежащие).
$\angle O_1O_2E = \angle BFO_2 = 30^\circ$ (соответственные).
Ответ: 30°.

3.



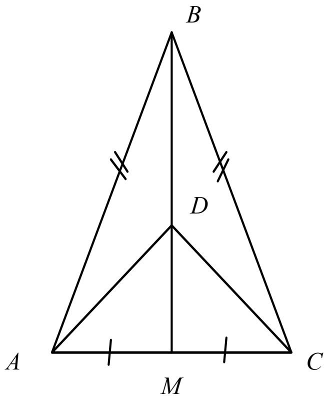
$AQ = AE = x$ (см. 1, г);
$BQ = BT = y$;
$CT = CE = z$;

$$+\begin{cases} x + y = 7; \\ x + z = 8; \\ y + z = 9. \end{cases}$$

$2x + 2y + 2z = 24$; $\quad x + y + z = 12$;
$x = 3$; $y = 4$; $z = 5$.
$KQ = KP$; $DP = DE$.
Периметр $\Delta AKD = AK + (KP + PD) + AD = AK + (KQ + DE) + AD =$
$= 2AQ = 6$.
Периметр $\Delta BNM = 2BQ = 8$ (аналогично).
Периметр $\Delta CLF = 2CF = 10$ (аналогично).
Ответ: 6; 8; 10.

Раздел VII. Задачи на повторение

1.



Дано: ΔABC, $AB = BC$, $AM = MC$; $D \in BM$.

Доказать: а) $\Delta ABD = \Delta CBD$;

б) $\Delta AMD = \Delta CMD$.

Доказательство.

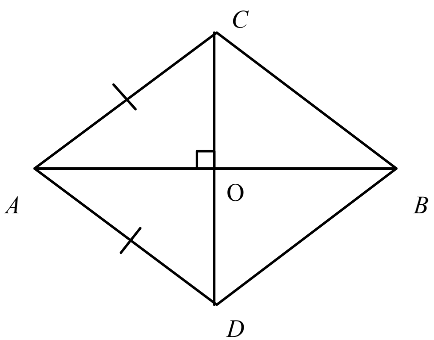
1. BM — медиана по условию), так как ΔABC — равнобедренный, то BM — биссектриса и высота.
$\angle ABM = \angle CBM$,
$\angle BMA = \angle BMC = 90^{\circ}$.

2. Рассмотрим ΔABD и ΔCBD: $AB = BC$ (по условию); BD — общая; $\angle ABD = \angle CBD$ (по п.1). Следовательно, $\Delta ABD = \Delta CBD$ (по двум сторонам и углу между ними).

3. Рассмотрим ΔADM и ΔCDM; $AM = MC$ (по условию), DM — общая; $\angle AMD = \angle CMD = 90^{\circ}$ (по п.1). Следовательно, $\Delta AMD = \Delta CDM$ (прямоугольный по двум катетам).

Что и требовалось доказать.

2.



Дано: $AB \cap CD = O$, $AC = AD$; $AB \perp CD$.

Доказать:

а) $BC = BD$;

б) $\angle ACB = \angle ADB$.

Доказательство.

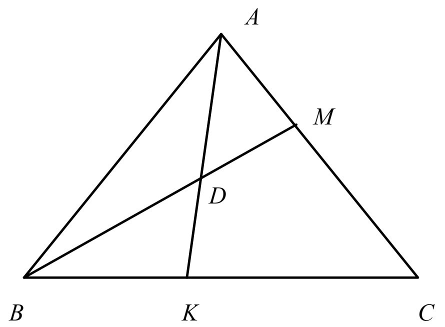
1. ΔACD — равнобедренный ($AC = AD$ по условию), AO — высота, следовательно, AO — биссектриса и медиана. $CO = OD$ и $\angle CAO = \angle DAO$.

2. Рассмотрим ΔACB и ΔADB. $AC = AD$ (по условию), AB — общая, $\angle CAB = \angle DAB$ (по п.1). Следовательно, $\Delta ACB = \Delta ADB$ (по двум сторонам и углу между ними).

3. Из равенства $\Delta ACB = \Delta ADB$ следует, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

Что и требовалось доказать.

3.



Дано: ΔABC, $\angle BAK = \angle KAC$; $\angle ABM = \angle MBC$;
а) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$;
б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$;
в) $\angle C = 130^\circ$;
г) $\angle C = \gamma$.
Найти: $\angle ADB$.

Решение.

1. Рассмотрим ΔABD. $\angle ABD = 50^\circ$, $\angle BAD = 25^\circ$, следовательно, $\angle ADB = 180^\circ - 50^\circ - 25^\circ = 105^\circ$.

2. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. $\angle ABD = \dfrac{\beta}{2}$, $\angle BAD = \dfrac{\alpha}{2}$, следовательно,

$$\angle ADB = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

3. $\angle C = 130^\circ$. $\angle BAD = x^\circ$, $\angle ABD = y^\circ$, следовательно, $\angle A = 2x^\circ$, $\angle B = 2y^\circ$;

$2x + 2y + 130^\circ = 180^\circ$;

$2x + 2y = 50^\circ$;

$x + y = 25^\circ$;

$x + y + \angle ADB = 180^\circ$;

$\angle ADB = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.

4. $\angle C = \gamma$. $\angle BAD = x$, $\angle ABD = y$, следовательно, $\angle A = 2x^{o}$, $\angle B = 2y^{o}$.

$2x + 2y + \gamma = 180^{o}$;

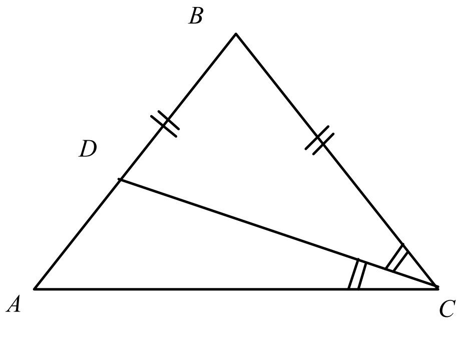
$2x + 2y = 180^{o} - \gamma$;

$x + y = 90^{o} - \dfrac{\gamma}{2}$;

$\angle ADB = 180^{o} - (x + y) = 180^{o} - 90^{o} + \dfrac{\gamma}{2} = 90^{o} + \dfrac{\gamma}{2}$.

Ответ: а) $\angle ADB = 105^{o}$; б) $\angle ADB = 180^{o} - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$; в) $\angle ADB = 155^{o}$; г) $\angle ADB = 90^{o} + \dfrac{\gamma}{2}$.

4.



Дано: ΔABC — равнобедренный; $AB = BC$; $\angle ACD = \angle DCB$; $\angle CDA = 150^{o}$.
Найти: $\angle B$.

Решение:

$\angle ACD = \angle DCB = x^{o}$;

$\angle C = 2x$, $\angle A = 2x$;

$x + 2x + 150^{o} = 180^{o}$ (из ΔACD).

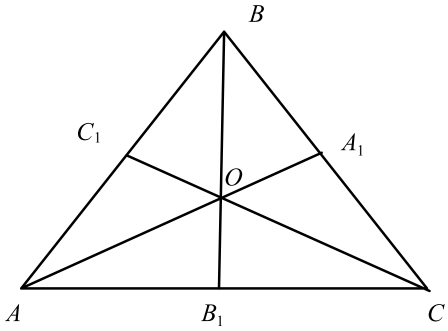
$3x = 30^{o}$, $x = 10^{o}$;

$\angle A = \angle C = 20^{o}$;

$\angle B = 180^{o} - 40^{o} = 140^{o}$.

Ответ: $\angle B = 140^{o}$.

5.



Дано: ΔABC, AA_1; BB_1; CC_1 — биссектрисы $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $AA_1 \cap BB_1 = O$.

Найти: $\angle AOB_1$, $\angle OB_1A$, $\angle OAB_1$, $\angle COB_1$, $\angle OB_1C$, $\angle OCB_1$, $\angle COA_1$, $\angle OA_1C$, $\angle OCA_1$.

Решение.

1. $\angle OAB_1 = \dfrac{\angle A}{2}$ (по условию); $\angle ABB_1 = \dfrac{\angle B}{2}$ (по условию).

2. Рассмотрим ΔABB_1:

$\angle BB_1A = 180^\circ - \angle A - \dfrac{\angle B}{2} = \angle OB_1A$ (по теореме о сумме углов треугольника);

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$;

$\angle OB_1A = \angle C + \dfrac{\angle B}{2}$.

3. Рассмотрим ΔAOB_1:

$\angle AOB_1 = 180^\circ - \dfrac{\angle A}{2} - \angle OB_1A$;

$\angle AOB_1 = 180^\circ - \dfrac{\angle A}{2} - 180^\circ + \angle A + \dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$.

4. Аналогично углы в остальных треугольниках:

$\angle OCB = \dfrac{\angle C}{2}$;

$\angle OB_1C = 180^\circ - \angle C - \dfrac{\angle B}{2} = \angle A + \dfrac{\angle B}{2}$;

$\angle COB_1 = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$;

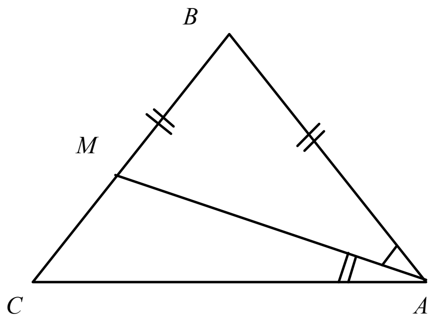
$\angle COA_1 = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle C}{2}$;

$\angle OA_1C = 180^\circ - \angle C - \dfrac{\angle A}{2} = \angle B + \dfrac{\angle A}{2}$;

$\angle OCA_1 = \dfrac{\angle C}{2}$ и т.д.

Ответ: $\angle OB_1A = \angle C + \dfrac{\angle B}{2}$, $\angle AOB_1 = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$ и т.д.

6.



Дано: ΔABC,
$AM \cap BC = M$; $AB = BM$;
$\angle BAM = 35^\circ$; $\angle CAM = 15^\circ$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение.

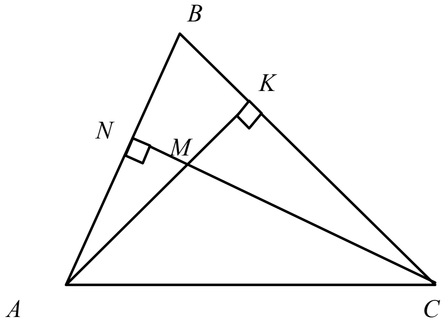
1. $\angle A = \angle BAM + \angle CAM = 35^\circ + 15^\circ = 50^\circ$.

2. ΔABM — равнобедренный;
$\angle BMA = \angle MAC + \angle MCA$ (теорема о внешнем угле треугольника);
$\angle MCA = 35^\circ - 15^\circ = 20^\circ$.

3. $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$ (теорема о сумме углов треугольника);
$\angle B = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$.

Ответ: $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 20^\circ$.

7.



Дано: ΔABC, $AK \perp BC$; $CN \perp AB$, $AK \cap CN = M$; $\angle A = 70°$; $\angle C = 80°$.

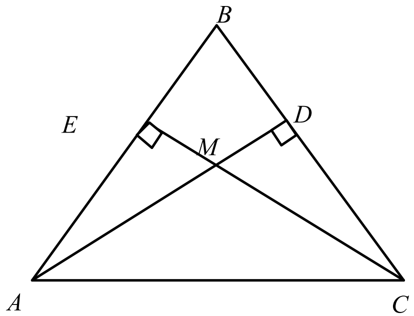
Найти: $\angle AMC$.

Решение.

1. Рассмотрим ΔANC: $\angle A = 70°$; $\angle N = 90°$; $\angle ACN = 180° - 70° - 90° = 20°$ (теорема о сумме углов треугольника).
2. Рассмотрим ΔAKC: $\angle C = 80°$; $\angle K = 90°$; $\angle CAK = 180° - 80° - 90° = 10°$.
3. Рассмотрим ΔAMC: $\angle AMC = 180° - \angle MAC - \angle MCA$; $\angle AMC = 180° - 20° - 10° = 150°$.

Ответ: $\angle AMC = 150°$.

8.



Дано: ΔABC, $AB = BC$, AD, CE — высоты; $AD \cap CE = M$; $\angle AMC = 48°$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение.

1. $\angle A = \angle C = \alpha$ (углы при основнии равнобедренного треугольника).

2. Рассмотрим ΔAEC: $\angle ECA = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$;
$\angle ECA = \angle MCA = 90^\circ - \alpha$.

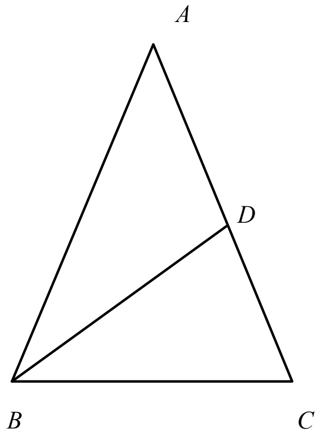
3. Рассмотрим ΔADC: $\angle DAC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$;
$\angle DAC = \angle MAC = 90^\circ - \alpha$.

4. Рассмотрим ΔAMC:
$\angle AMC + \angle MCA + \angle MAC = 180^\circ$ (теорема о сумме углов треугольника);
$90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha + 48^\circ = 180^\circ$;
$2\alpha = 48^\circ$; $\alpha = 24^\circ$.

5. Рассмотрим ΔABC:
$\angle B = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$.

Ответ: $\angle A = \angle C = 24^\circ$; $\angle B = 132^\circ$.

9.



Дано: ΔABC, $AB = AC$; $\angle B = \angle C = 2\angle A$; BD — биссектриса.

Доказать: $AD = BC$.

Решение.

1. $\angle A = \alpha$; $\angle B = \angle C = 2\alpha$ (по условию);
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$;
$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$; $5\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 36^\circ$;
$\angle A = 36^\circ$; $\angle B = \angle C = 72^\circ$.

2. $\angle ABD = \angle DBC = 36^\circ$.

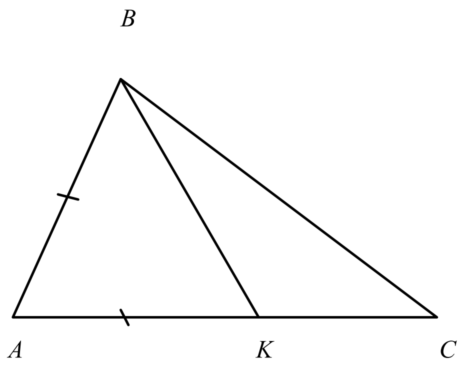
3. Рассмотрим ΔABD: $\angle A = \angle ABD = 36^{\circ}$, следовательно ΔABD равнобедренный $AD = BD$.

4. Рассмотрим ΔBDC: $\angle DBC = 36^{\circ}$; $\angle BCD = 72^{\circ}$ (п.1) $\angle BDC = 180^{\circ} - 36^{\circ} - 72^{\circ} = 72^{\circ}$ следовательно ΔBDC равнобедренный $BD = BC$.

5. $BD = BC$ (п.4); $AD = BD$ (п.3) следовательно $AD = BC$.

Что и требовалось доказать.

10.



Дано: ΔABC; $K \in AC$; $AB = AK$; $\angle ABK = 75^{\circ}$, $\angle ACB = 60^{\circ}$; $BC = 3$.

Найти: AC.

Решение.

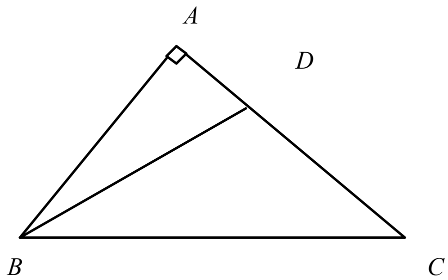
1. ΔABK — равнобедренный, так как $AB = AK$ (по условию). Следовательно, $\angle ABK = \angle BKA = 75^{\circ}$; $\angle BAK = 180^{\circ} - 75^{\circ} - 75^{\circ} = 30^{\circ}$ (теорема о сумме углов треугольника).

2. Рассмотрим ΔABC:
$\angle B = 180^{\circ} - \angle A - \angle C = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 30^{\circ} = 90^{\circ}$. Следовательно, ΔABC — прямоугольный с острым углом 30°.

Отсюда $BC = \frac{1}{2}AC$ (теорема о катете, лежащем против угла в 30°).
$AC = 2BC$;
$AC = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: $AC = 6$.

11.



Дано: ΔABC, $\angle A = 90^o$; $\angle B = 75^o$, $\angle ADB = 2\angle DBC$; $AB = 5$, $D \in AC$.

Найти: DC.

Решение.

1. $\angle ADB = 2\angle DBC$. Пусть $\angle DBC = \alpha$, тогда $\angle ADB = 2\alpha$.
2. $\angle ADB$ — внешний угол ΔBDC.

$\angle ADB = \angle DBC + \angle DCB$ (теорема о внешнем угле треугольника);
$\angle DCB = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

Отсюда, $\angle DCB = \angle DBC$.

Следовательно, ΔBDC — равнобедренный, т.е. $BD = DC$.

3. Рассмотрим ΔABC:

$\angle A = 90^o$, $\angle B = 75^o$;
$\angle C = 180^o - 90^o - 75^o = 15^o$ (теорема о сумме углов треугольника).

Значит, $\alpha = 15^o$.

4. Рассмотрим ΔABD:

$\angle BDA = 2\alpha = 30^o$, $\angle A = 90^o$.

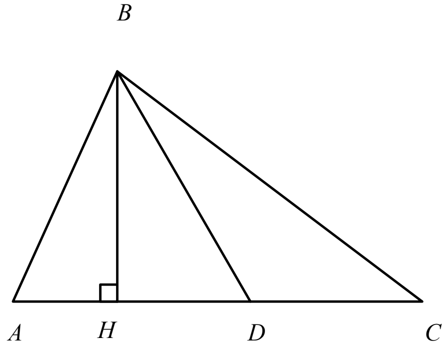
Отсюда $AB = \dfrac{1}{2} BD$ (теорема о катете, лежащем против угла в 30^o).
$BD = 2AB$;
$BD = 2 \cdot 5 = 10$.

5. $DC = BD$ (по п.2).

Значит, $DC = 10$.

Ответ: $DC = 10$.

12.



а) Дано: ΔABC; $\angle A =$ $= 50^\circ$, $\angle C = 20^\circ$; $BH \perp\ C$; $\angle ABD = \angle DBC$.

Найти: $\angle HBD$.

Решение.

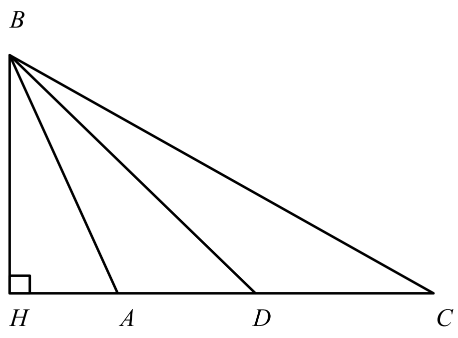
1. $\angle B = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$ (теорема о сумме углов треугольника).

2. $\angle ABD = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

3. ΔABD — прямоугольный, $\angle ABH = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

4. $\angle HBD = \angle ABD - \angle ABH = 55^\circ - 40^\circ = 15^\circ$.

Ответ: $\angle HBD = 15^\circ$.



б) Дано: ΔABC; $\angle A =$ $= 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$; $BH \perp$ $\perp AC$; $\angle ABD = \angle DBC$.

Найти: $\angle HBD$.

Решение.

1. $\angle ABC = 180^\circ - 110^\circ - 50^\circ = 20^\circ$ (теорема о сумме углов треугольника).

2. $\angle ABD = \dfrac{20^\circ}{2} = 10^\circ$.

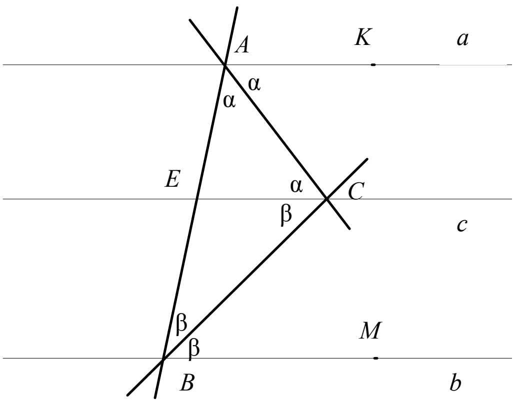
3. $\angle BAH = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ (смежный).

4. $\angle HBA = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

5. $\angle HBD = \angle HBA + \angle ABD = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

Ответ: $\angle HBD = 30^\circ$.

13.



Дано: $a \| b$; AC, BC — биссектриса; $CE \parallel a$; $AB \cap CE = E$; $AB = 12$.

Найти: CE.

Решение.

1. $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$; $\angle KAC = \alpha$; $\angle MBC = \beta$.

2. $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (сумма внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых секущей); $\alpha + \beta = 90^\circ$.

3. $\angle ACE = \alpha$ (накрест лежащий с $\angle KAC$); $\angle BCE = \beta$ (накрест лежащий с $\angle MBC$).

4. ΔAEC — равнобедренный $AE = EC$; ΔBEC — равнобедренный $BE = EC$.

5. $CE = \dfrac{1}{2} AB$; $CE = 6$.

Ответ: $CE = 6$.

Татьяна Анатольевна Пыжова
Геннадий Викторович Лупенко
Ирина Александровна Масленникова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для углубленного изучения математики в 7-м классе

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет изготовлен Л.М. Бурлаковой

Подписано в печать 09.12.2008. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд.л. 4,75 Печ.л. 4,75 Тираж 2000 экз.
Изд. № 052-1 Заказ № 1

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш.,31