ФЕДЕРАЛЬНЕОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ “МИФИ”

ЗАДАНИЯ ОТРАСЛЕВОЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «РОСАТОМ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2009 г.

Москва 2009

УДК 51
ББК 22.1
Авт. знак З-15

Задания отраслевой физико-математической олимпиады школьников “Росатом” по математике. — М.: МИФИ, 2009 г. — 72 с.

Составители: А.В. Баскаков, С.Г. Климанов, Д.Г. Орловский, В.М. Простокишин, Д.С. Теляковский.

Сборник содержит задания отраслевой физико-математической олимпиады школьников “Росатом” за 2009 год по математике. Предназначен для школ и лицеев с углублённым изучением математики.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Н.А. Кудряшов

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Физико-математическая олимпиада памяти И.В. Савельева, 11 класс

Вариант № 1

1. Решите неравенства: а) $\dfrac{1}{x-2} \geqslant -2$, б) $\dfrac{4}{x-5} - \dfrac{25}{x+2} + 7 \geqslant 0$.

2. Решите уравнения: а) $2 + \cos 2x + 3\cos x = 0$,
б) $\sqrt{-\operatorname{ctg} x} \cdot (2 + \cos 2x + 3\cos x) = 0$.

3. Упростите выражение

$$\frac{2\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{5\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} + \frac{\sqrt{-63x-108-9x^2}}{\sqrt{-7x-x^2-12}}.$$

4. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. Прямая, проходящая через O, пересекает окружность в точке F. Точки O и F лежат по одну сторону от прямой AB. Расстояния от точки F до прямых OA и OB равны 18 и 50 соответственно. Найдите расстояние от точки F до прямой AB.

5. При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = \cos 2x + p^2 - 2p + 1$ в точке $x = p$ не пересечёт графики $y = -2x + 3$ и $y = x + \dfrac{3}{4x}$?

6. У прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания AB и AD равны соответственно 21 и 29. Через вершины B, D и C_1 проведена плоскость, отсекающая от параллелепипеда пирамиду объёмом $210\sqrt{15}$. Найдите площадь сечения BDC_1, если известно, что диагональ основания BD перпендикулярна стороне AB.

Вариант № 2

1. Решите неравенства: а) $\dfrac{1}{3-2x} \leqslant -1$, б) $\dfrac{9}{x-3} - \dfrac{1}{x+1} + 1 \leqslant 0$.

2. Решите уравнения: а) $12\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin 2x = 0$,
б) $\sqrt{-\sin x}(12\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin 2x) = 0$.

3. Упростите выражение

$$\frac{3\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4} - \frac{2\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} + \frac{\sqrt{25x-25x^2}}{\sqrt{x-x^2}}.$$

4. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках C и D. Прямая, проходящая через O, пересекает окружность в точке E. Точки O и E лежат по разные стороны от прямой CD. Расстояния от точки E до прямых OC и CD равны 27 и 45 соответственно. Найдите расстояние от точки E до прямой OD.

5. При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = \sin 3x + p^2 + 3p - 5$ в точке $x = p$ не пересечёт графики $y = 3x + 5$ и $y = 2x - \dfrac{5}{3x}$?

6. У прямого параллелепипеда $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ стороны основания MN и NP равны соответственно 23 и 27. Через вершины M, P и N_1 проведена плоскость. Известно, что площадь сечения MPN_1 равна 460. Найдите высоту параллелепипеда, если известно, что диагональ основания PM перпендикулярна стороне PQ.

Физико-математическая олимпиада памяти И.В. Савельева, 10 класс

Вариант № 1

1. Решите уравнения:
а) $(3x+1)^2 - 2(3x+1) - 15 = 0$,
б) $(3x+1)^2 - 2\sqrt{(3x+1)^2} - 15 = 0$,
в) $(3x+1)^2 - 2(\sqrt{3x+1})^2 - 15 = 0$.

2. Решите уравнение

$$\frac{3}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{x(x-3)}=\frac{\sqrt{24x-4x^2-20}}{\sqrt{6x-x^2-5}}-1.$$

3. Постройте графики функций: а) $y=1-|x-2|$,
б) $y=\max\{\big|1-|x-2|\big|;\,{}^{x}\!/_{2}\}$.

4. Найдите максимальное и минимальное значения функции $y=-\sqrt{4x-x^2+45}$ на отрезке $[2-2\sqrt{6};2+4\sqrt{3}]$. Постройте график этой функции.

5. Центры окружностей радиусов 2 и 4 удалены на расстояние 5. Найдите длину общей хорды этих окружностей.

6. Найдите все несократимые дроби вида ${}^{m}\!/_{n}$, $m,n\in\mathbb{N}$, которые после увеличения числителя на 1, а знаменателя на 10 уменьшаются в 2 раза.

Вариант № 2

1. Решите уравнения:
а) $(2x-3)^2-(2x-3)-6=0$,
б) $(2x-3)^2-\sqrt{(2x-3)^2}-6=0$,
в) $(2x-3)^2-(\sqrt{2x-3})^2-6=0$.

2. Решите уравнение

$$\frac{2}{(x+1)(x-2)}+\frac{3}{x(x-1)}=\frac{\sqrt{45-36x-9x^2}}{\sqrt{5-4x-x^2}}-2.$$

3. Постройте графики функций: а) $y=|x+1|-2$,
б) $y=\max\{\big||x+1|-2\big|;-2x\}$.

4. Найдите максимальное и минимальное значения функции $y=\sqrt{80-2x-x^2}$ на отрезке $[-1-4\sqrt{2};-1+2\sqrt{14}]$. Постройте график этой функции.

5. Окружности радиусов 3 и 5 пересекаются. Длина общей хорды равна 4. Чему равно расстояние между центрами окружностей?

6. Найдите все несократимые дроби вида $^{m}/_{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, которые при увеличении числителя на 10, а знаменателя на 6 возрастают в 2 раза.

Физико-математическая олимпиада памяти И.В. Савельева, 9 класс

Вариант № 1

1. Решите неравенства: а) $1 + \dfrac{2}{5}x > 0{,}6 - 3\dfrac{1}{5}(3x - 2)$, б) $|x - 5| \cdot (8 + 2x - x^2) \geqslant 0$.

2. Пусть заданы две функции $f(x) = 4x - x^2$ и $g(x) = x - 4$. а) При каких значениях x первый график лежит выше второго? б) Решите неравенство $\min\{f(x), g(x)\} \geqslant 0$.

3. В школе работают секции волейбола и ориентирования. Секцию волейбола посещают 86 человек, секцию ориентирования — 100 человек. Сколько учащихся в школе, если известно, что каждый школьник ходит хотя бы в одну секцию и 24 % школьников посещают обе секции?

4. Стороны треугольника лежат на прямых $l_1 : x - 2y + 3 = 0$, $l_2 : 6x - y - 26 = 0$, $l_3 : 4x + 3y - 10 = 0$. Найдите: а) вершины треугольника, б) площадь треугольника, в) отношение, в котором делит стороны треугольника прямая, проходящая через начало координат и параллельная прямой l_1.

5. Сумма двух натуральных чисел равна 480. Если зачеркнуть последнюю цифру первого числа, то получится второе число, делённое на 7. Найдите эти числа.

Вариант № 2

1. Решите неравенства: а) $2 + 1\dfrac{1}{3}x \leqslant 3\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}(x-4)$,
   б) $|x+2|(x^2 - x - 20) \geqslant 0$.
2. Пусть заданы две функции $f(x) = x^2 - 6x$ и $g(x) = 2x - 7$. а) При каких значениях x первый график лежит ниже второго? б) Решите неравенство $\max\{f(x), g(x)\} > -5$.
3. В школе работают секции лёгкой атлетики и баскетбола. Секцию лёгкой атлетики посещают 92 человека, секцию баскетбола — 70 человек. Сколько учащихся в школе, если известно, что каждый школьник ходит хотя бы в одну секцию и 35 % школьников посещают обе секции?
4. Стороны треугольника лежат на прямых $l_1 : x - y - 3 = 0$, $l_2 : 2x + 3y - 11 = 0$, $l_3 : 9x + y + 13$. Найдите: а) вершины треугольника, б) площадь треугольника, в) отношение, в котором делит стороны треугольника прямая, проходящая через начало координат и параллельная прямой l_2.
5. Сумма двух натуральных чисел равна 547. Если зачеркнуть последнюю цифру первого числа, то получится второе число, делённое на 5. Найдите эти числа.

Физико-математическая олимпиада памяти И.В. Савельева, 8 класс

Вариант № 1

1. Решите уравнение $17 - 2(x - 2x^2 + 5) + 3(1 - x - 3x^2) = 0$.
2. Решите: а) неравенство $2x - 3 \geqslant 3x + 1$; б) систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3 \geqslant 3x + 1, \\ |x+2| < 5. \end{cases}$
3. Упростите: а) $\dfrac{4a^2 - 9}{4a + 6} - a + \dfrac{1}{2}$; б) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$.

4. Площадь прямоугольного треугольника равна 336, а один из катетов на 34 длиннее другого. Найдите гипотенузу треугольника.

5. Производительность первого рабочего на 40 % больше производительности второго. Вместе они выполняют всю работу за 1 ч 15 мин. За какое время второй рабочий один выполнит всю работу?

Вариант № 2

1. Решите уравнение $10-3(2x^2-5x+4)-\frac{1}{2}(8x-4x^2+10)=0$.

2. Решите: а) неравенство $3x-2<5x+8$; б) систему неравенств $\begin{cases}3x-2<5x+8,\\ |x-1|\geqslant 4.\end{cases}$

3. Упростите: а) $\dfrac{16-25a^2}{15a+12}+\dfrac{5}{3}a+\dfrac{2}{3}$; б) $(\sqrt{3}+4)\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

4. Площадь прямоугольного треугольника равна 270, а отношение длин гипотенузы и бо́льшего из катетов — $^{13}/_{12}$. Найдите ме́ньший катет.

5. Производительность первого рабочего на 40 % меньше производительности второго. Вместе они выполняют всю работу за 1 ч 30 мин. За какое время первый рабочий один выполнит всю работу?

Физико-математическая олимпиада памяти И.В. Савельева, 7 класс

Вариант № 1

1. Вычислите, не используя калькулятор,

$$1{,}2-\left(1{,}3:4\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}\cdot 0{,}24\right)\cdot\frac{5}{4}.$$

2. Отец старше сына в 4 раза. Сумма их возрастов равна 50 годам. Через сколько лет отец станет втрое старше сына?

3. Когда автобус проехал $^3/_7$ пути и ещё 20 км, ему осталось поехать $^1/_3$ пути без 5 км. Найдите длину пути.

4. Велосипедист проезжает 1 км за 1 мин 20 с. На сколько секунд быстрее ему надо проезжать 1 км, чтобы скорость увеличилась на 5 км/ч?

5. При делении натурального числа A на натуральное число B в частном получается 5 и в остатке 7. Разность чисел A и B равна 299. Найдите эти числа.

Вариант № 2

1. Вычислите, не используя калькулятор,

$$\left(1{,}5 : 1\frac{1}{4} - 3\frac{1}{5} : 1{,}6\right) - \left(2\frac{1}{15} - \frac{29}{30}\right).$$

2. Отец старше сына на 24 года. Сумма их возрастов равна 52 годам. Через сколько лет сын станет вдвое младше отца?

3. Когда автобус проехал $^4/_7$ пути без 1 км, ему осталось поехать $^5/_{12}$ пути и ещё 2 км. Найдите длину пути.

4. Мотоциклист проезжает 1 км за 48 с. На сколько секунд медленнее ему надо проезжать 1 км, чтобы уменьшить скорость на 25 км/ч?

5. При делении натурального числа A на натуральное число B в частном получается 4 и в остатке 11. Сумма чисел A и B равна 426. Найдите эти числа.

Предварительный тур в форме ЕГЭ, 1

Вариант № 1

A1. Решите неравенство $|x-3| \geqslant 2$.
1) $x \in [5;+\infty)$; 2) $x \in (-\infty;1] \cup [5;+\infty)$; 3) $x \in (-\infty;1]$; 4) $x \in [1;5]$; 5) $x \in \mathbb{R}$.

A2. Найдите корни уравнения $\dfrac{7x+4-2x^2}{x^2-16} = 0$.
1) $\{4; -1/2\}$; 2) $\left\{\dfrac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{7}\right\}$; 3) $\{\pm 4; -1/2\}$; 4) $\{-1/2\}$; 5) $\left\{\dfrac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{7}; \pm 4\right\}$.

A3. Решите неравенство $\dfrac{1}{2-3x} \geqslant -1$.
1) $x \in (2/3; 1]$; 2) $x \in [1;+\infty)$; 3) $x \in (-\infty; 2/3) \cup [1;+\infty)$; 4) $x \in (-\infty;1]$; 5) $\varnothing$.

A4. Решите уравнение $\log_{1/2}(x^2-1) = -3$.
1) ± 3; 2) $\pm\sqrt{7/8}$; 3) 3; 4) -3; 5) 1.

B1. Решите уравнение $\sqrt{-\cos x}(\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x) = 0$.

B2. Решите неравенство $\dfrac{2^{2x}-2}{2x-1} \geqslant \dfrac{2^{2x}-2}{3x+2}$.

B3. Решите уравнение $(3x^2+17x+10)(\sqrt{4x+13}+1-2x) = 0$.

C1. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + (a\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}\sin x - \cos x) + 1 - a\sqrt{3} = 0$ имеет ровно два решения на отрезке $\left[-\dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Вариант № 2

A1. Решите неравенство $|2-x|<3$.
1) $x\in(5;+\infty)$; 2) $x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$; 3) $x\in(-\infty;-1)$;
4) $x\in(-1;5)$; 5) $\varnothing$.

A2. Найдите корни уравнения $\dfrac{9x-10-2x^2}{x^2-4}=0$.
1) $\{5/2\}$; 2) $\left\{\dfrac{5\pm\sqrt{43}}{9}\right\}$; 3) $\{5/2;\pm2\}$; 4) $\{2;\,5/2\}$; 5) $\varnothing$.

A3. Решите неравенство $\dfrac{1}{2x-3}\leqslant-\dfrac{1}{2}$.
1) $x\in[1/2;+\infty)$; 2) $x\in(-\infty;\,1/2]$; 3) $x\in[1/2;\,3/2)$; 4) $\varnothing$;
5) $x\in(-\infty;\,1/2]\cup(3/2;+\infty)$.

A4. Решите уравнение $\log_3(x^2-13/6)=-1$.
1) $\varnothing$; 2) $3/4$; 3) $\pm\sqrt{5/2}$; 4) $\pm3/4$; 5) $\sqrt{31/6}$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{-\operatorname{ctg}x}(\cos2x-\cos x)=0$.

B2. Решите неравенство $\dfrac{27^x-3}{5x+2}\leqslant\dfrac{27^x-3}{3x-1}$.

B3. Решите уравнение $(7x+10-12x^2)(\sqrt{5x+1}+2x-2)=0$.

C1. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\sqrt3\sin2x-\cos2x+(\sqrt3-a)(\sqrt3\sin x+\cos x)+2-a\sqrt3=0$ имеет ровно два решения на интервале $\left(-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Вариант № 3

A1. Решите неравенство $|x+2|>5$.
1) $x\in(-\infty;-7)\cup(3;+\infty)$; 2) $x\in(-\infty;-7)$; 3) $x\in(3;+\infty)$;
4) $x\in(-7;3)$; 5) $x\in\mathbb{R}$.

A2. Найдите корни уравнения $\dfrac{2-3x^2-x}{x^2-1}=0$.
1) $\{\pm 1;\ ^2/_3\}$; 2) $\{^7/_4; -^1/_4\}$; 3) $\{^2/_3\}$; 4) $\{\pm 1;\ ^7/_4; -^1/_4\}$; 5) $\varnothing$.

A3. Решите неравенство $\dfrac{1}{2x-1} \geqslant -1$.
1) $x \in (-\infty; 0] \cup (^1/_2; +\infty)$; 2) $x \in [0; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; 0]$;
4) $x \in [0;\ ^1/_2)$; 5) $x \in (-\infty;\ ^1/_2) \cup (^1/_2; +\infty)$.

A4. Решите уравнение $\log_{1/3}(x^2-7) = -2$.
1) $\varnothing$; 2) 4; 3) $\pm ^8/_3$; 4) ± 4; 5) $^8/_3$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{-\sin x}(2-3\sin 2x+2\sin^2 x)=0$.

B2. Решите неравенство $\dfrac{-5(8^x-4)}{3x-2} \geqslant \dfrac{2(8^x-4)}{x+3}$.

B3. Решите уравнение $(x+12-6x^2)(\sqrt{6x+1}+2x-3)=0$.

C1. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\sin 2x + 2a(\sin x - \cos x) + 2 - 2\sqrt{3}a = 0$ имеет ровно два решения на промежутке $\left[\dfrac{5\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Вариант № 4

A1. Решите неравенство $|x-1| < 2$.
1) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; 2) $x \in (3; +\infty)$; 3) $x \in (-1; 3)$;
4) $x \in (-\infty; -1)$; 5) $x \in \mathbb{R}$.

A2. Найдите корни уравнения $\dfrac{3-x-2x^2}{x^2-1}=0$.
1) $\{^3/_2; 1\}$; 2) $\{^2/_3; 1\}$; 3) $\{-^3/_2\}$; 4) $\{^3/_2; \pm 1\}$; 5) $\{-^2/_3\}$.

A3. Решите неравенство $\dfrac{1}{x+2} \leqslant 4$.
1) $x \in [-1\,^3/_4; +\infty)$; 2) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 3) $x \in \mathbb{R}$;
4) $x \in (-\infty; -1\,^3/_4]$; 5) $x \in (-\infty; -2) \cup [-1\,^3/_4; +\infty)$.

A4. Решите уравнение $\log_{3/2}(x^2 - {}^5/_9) = -2$.
1) $\varnothing$; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{101}/6$; 4) ±1; 5) $\sqrt{101}/6$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x}(\sin^2 x + 3\cos^2 x + 3\cos x) = 0$.

B2. Решите неравенство $\dfrac{9^x - 27}{4x + 5} \leqslant \dfrac{9^x - 27}{2x - 3}$.

B3. Решите уравнение $(11x + 10 - 6x^2)(\sqrt{2x - 4} + 6 - x) = 0$.

C1. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + (2a - \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3}\cos x) - 2a\sqrt{3} + 1 = 0$ имеет ровно три решения на промежутке $\left(\dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Предварительный тур в форме ЕГЭ, 2

Вариант № 1

A1. Решите неравенство $x^4 - 2x^2 - 8 \geqslant 0$.
1) $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$; 2) $[4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

A2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{16 - 2^{x^2}}$.
1) $(-\infty; 2]$; 2) $[-2; 2]$; 3) $(-\infty; -2]$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

A3. Найдите множество значений функции $f(x) = 3 - 2\cos^2 2x$.
1) $[-2; 2]$; 2) $[1; 3]$; 3) $[1; 5]$; 4) $[-1; 1]$.

A4. Стороны треугольника $AB = 7$; $BC = 5$; $AC = 8$. Найдите $\cos\angle BAC$.
1) $1/7$; 2) $11/14$; 3) $-1/7$; 4) $1/2$.

A5. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{x^2 - 3}{3} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{4}{3}$, умноженную на 60.

A6. Для функции $f(x) = 5x - 7\cos 2x + 2$ найдите значение производной в точке $x = -\pi/4$.

A7. Решите уравнение $\log_{1/2} \log_3(2-x) = 0$.

A8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Найдите a_{20}, если $a_7 = -11$ и $a_3 = 1$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-15} = 2$.

B2. Решите неравенство $\sqrt{3} \cdot 12^x - 4\sqrt{12} \cdot 3^x - 4^x + 8 \geqslant 0$.

C1. При всех значениях параметра a определите количество решений уравнения $\big||x-3|-3\big| = |x+2a|+1$.

C2. Точка D лежит на стороне CB прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = \pi/2$), причём $\angle ADC = \arccos 1/\sqrt{10}$, $|BD| = 4\sqrt{10}/3$, $|AB| = 5$. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант № 2

A1. Решите неравенство $5x^2 - x^4 + 36 \geqslant 0$.
1) $[-3;3]$; 2) $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-4] \cup [9;+\infty)$; 4) $[-4;9]$.

A2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{3^{x^2+x} - 9}$.
1) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$; 2) $[-2;1]$; 3) $(-\infty;-1] \cup [0;+\infty)$; 4) $(0;+\infty)$.

A3. Найдите множество значений функции $f(x)=5\cos 3x-2$.
1) $[3;7]$; 2) $[-3;7]$; 3) $[-5;5]$; 4) $[-7;3]$.

A4. Стороны треугольника $PQ=9$; $QR=6$; $PR=8$. Найдите $\cos\angle PRQ$.
1) $19/96$; 2) $53/108$; 3) $109/144$; 4) $-109/144$.

A5. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{x^2+1}{2} - \dfrac{x}{5} = \dfrac{4}{5}$, умноженную на 60.

A6. Для функции $f(x) = 3\sin {}^{x}/_{2} + {}^{5x}/_{2} - 7$ найдите значение производной в точке $x = 2\pi$.

A7. Решите уравнение $\log_3 \log_{1/8}(2x - {}^{3}/_{2}) = -1$.

A8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Найдите a_{17}, если $a_9 = 13$ и $a_4 = -2$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{x+11} + \sqrt{2x-6} = 6$.

B2. Решите неравенство $48^x - \sqrt{6} \cdot 2^{3x} - \sqrt{8} \cdot 6^x + \sqrt{48} \leqslant 0$.

C1. При всех значениях параметра a определите количество решений уравнения $\big|4 - |x-2|\big| + |2x - a| = 2$.

C2. Точка D лежит на стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$), причём $|CD| = \frac{1}{4}|CB|$, $\angle ACB = \arccos\sqrt{{}^{2}/_{3}}$, $|AD| = {}^{3}/_{4}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант № 3

A1. Решите неравенство $x^4 + 2x^2 - 3 < 0$.
1) $(-1; 1)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-3; 1)$.

A2. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{{}^{1}/_{5} - 5^{3-x^2}}$.
1) $[-2; 2]$; 2) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$; 3) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

A3. Найдите множество значений функции $f(x) = 3\sin^2 {}^{x}/_{2} - 1$.
1) $[-1; 2]$; 2) $[-3; 3]$; 3) $[0; 3]$; 4) $[-4; 2]$.

A4. Стороны треугольника $MN = 13$; $NK = 8$; $MK = 7$. Найдите $\cos\angle MKN$.
1) ${}^{1}/_{2}$; 2) $-{}^{71}/_{112}$; 3) $-{}^{1}/_{2}$; 4) ${}^{47}/_{68}$.

A5. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{x^2-2}{5}+\dfrac{x}{2}=-\dfrac{3}{5}$, умноженную на 60.

A6. Для функции $f(x) = 2x - 3\sin 3x + 11$ найдите значение производной в точке $x = {}^{\pi}/_{6}$.

A7. Решите уравнение $\log_{1/4}\log_2(x+1) = -1$.

A8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Найдите a_{25}, если $a_{13} = -5$ и $a_8 = 20$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{x-6}+\sqrt{2x-5}=4$.

B2. Решите неравенство $\sqrt{2}\cdot 36^x - 8\cdot 18^x - 6\cdot 2^x + 24\sqrt{2} \geqslant 0$.

C1. При всех значениях параметра a определите количество решений уравнения $\big||x+1|-2\big| = |{}^{x}/_{2}+a|$.

C2. Точка D лежит на стороне AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C={}^{\pi}/_{2}$), причём $|AB| = 6$, $\angle BDC = \arccos {}^{1}/_{\sqrt{3}}$, $|AD| = \sqrt{6}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Вариант № 4

A1. Решите неравенство $x^2 + x^4 - 20 > 0$.
1) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; 2) $(-\infty;-5)\cup(4;+\infty)$; 3) $(-2;2)$; 4) $(-5;4)$.

A2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{2^{x^2+3x}-16}$.
1) $(-\infty;-4]\cup[1;+\infty)$; 2) $(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)$; 3) $[0;+\infty)$; 4) $[-4;1]$.

A3. Найдите множество значений функции $f(x) = 4\cos {}^{x}/_{3} - 5$.
1) $[-4;4]$; 2) $[-1;9]$; 3) $[-9;-1]$; 4) $[-6;-4]$.

A4. Стороны треугольника $AB = 10$; $BC = 7$; $AC = 6$. Найдите $\cos\angle ABC$.
1) ${}^{29}/_{40}$; 2) ${}^{5}/_{42}$; 3) $-{}^{5}/_{42}$; 4) ${}^{113}/_{140}$.

A5. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{x^2+2}{3}+\dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{4}$, умноженную на 60.

A6. Найдите значение производной функции $f(x) = 6\cos {}^{x}/_{3}+$ $+4x+2$ в точке $x = -{}^{\pi}/_{2}$.

A7. Решите уравнение $\log_7 \log_{1/2}({}^{5}/_{2} - 2x) = 0$.

A8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Найдите a_{22}, если $a_{17} = 17$ и $a_{11} = -1$.

B1. Решите уравнение $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = 1$.

B2. Решите неравенство $20^x - 2\sqrt{2}\cdot 5^x - 25\sqrt{5}\cdot 4^x + 50\sqrt{10} \geqslant 0$.

C1. При всех значениях параметра a определите количество решений уравнения $\big||x-4|-1\big| + |x+a| = 3$.

C2. Точка D лежит на стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$), причём $\angle BAC = \arccos\sqrt{{}^{5}/_{6}}$, $|AD| = \frac{4}{5}|AB|$, $|CD| = 7$. Найдите площадь треугольника ABC.

Предварительный тур в форме ЕГЭ, 3

Вариант № 1

A1. Решите неравенство $\dfrac{2-3x}{x+1} \geqslant \dfrac{x+2}{x+1}$.
1) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0]$; 2) $(-1; 0]$; 3) $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$;
4) $(-\infty; 0)$.

A2. Найдите область значений функции $f(x) = 3^{\cos x}$.
1) $\mathbb{R}$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $(-1; 1)$; 4) $[{}^{1}/_{3}; 3]$.

A3. Решите уравнение $\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x = 0$.

1) $\pm{}^{2\pi}/_3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) ${}^{\pi}/_2 + \pi k$, $\pm{}^{2\pi}/_3 + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$; 3) πk, $\pm{}^{2\pi}/_3 + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$; 4) ${}^{\pi}/_2 + \pi n$, $\pm{}^{5\pi}/_6 + 2\pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

B1. Для функции $f(x) = \sqrt{\log_{1/2}(x-3)+3}$ найдите область определения.

B2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника с катетами $AB = 5$, $BC = 12$.

B3. Найдите значение производной функции $f(x)=(x+2)\sin \pi x$ в точке $x_0=1$.

B4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4 + \sqrt{5x - x^2 - 2} = 5x, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$$

B5. Имеются два куска сплавов меди с цинком. В первом куске массы металлов соотносятся как 1:2, а во втором — как 3:5. Сплавив эти два куска, получили третий сплав, в котором массы металлов соотносятся как 43:77. Найдите массу третьего сплава, если известно, что масса первого куска на 2 кг меньше массы второго.

C1. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{\log_2(4x-3) - 2\log_2 x}{|x-2| - a} \geqslant 0.$$

C2. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной 6. Основание H высоты SH пирамиды лежит на стороне AB ($AH = 2$, $SH = 8$). Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант № 2

A1. Решите неравенство $\dfrac{3+4x}{2-x} \geqslant \dfrac{3x-5}{2-x}$.

1) $[-8; 2)$; 2) $(-\infty; -8] \cup (2; +\infty)$; 3) $[-8; 2) \cup (2; +\infty)$; 4) $[-8; +\infty)$.

A2. Найдите область значений функции $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sin^2 x}$.

1) $(0; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 1]$; 4) $[{}^1\!/\!_3; 1]$.

A3. Решите уравнение $\sin^2 x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$.

1) $(-1)^n\,{}^{\pi}\!/\!_3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) ${}^{\pi}\!/\!_2 + \pi n,\ (-1)^{m+1}\,{}^{\pi}\!/\!_6 + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi n,\ (-1)^m\,{}^{\pi}\!/\!_3 + \pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n,\ (-1)^k\,{}^{\pi}\!/\!_6 + \pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$.

B1. Для функции $f(x) = \sqrt{4 - \log_2(x+2)}$ найдите область определения.

B2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника с катетами $MN = 12$, $NK = 16$.

B3. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x+3}$ в точке $x_0 = -1$.

B4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 3\sqrt{y^2 - 2y + 1} = 3, \\ 2\sqrt{3}\sin x = -y. \end{cases}$$

B5. Имеются два куска сплавов меди с цинком. В первом куске содержится 60 % меди, а во втором — 25 %. Сплавив эти два куска, получили третий сплав, в котором содержится 45 % меди. Найдите массу третьего сплава, если известно, что масса первого куска на 2 кг больше массы второго.

C1. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{2\log_2 x - \log_2(6x-5)}{|x-3|-a} \geqslant 0.$$

C2. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 9$ и боковой стороной 6. Основание H высоты SH пирамиды лежит на стороне AB ($AH = 3$, $SH = 10$). Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант № 3

A1. Решите неравенство $\dfrac{5x+2}{2x+1} \geqslant \dfrac{2x-2}{2x+1}$.
1) $[-{}^4\!/3; +\infty)$; 2) $[-{}^4\!/3; -{}^1\!/2)$; 3) $(-\infty; -{}^4\!/3] \cup (-{}^1\!/2; +\infty)$; 4) $[-{}^4\!/3; -{}^1\!/2) \cup (-{}^1\!/2; +\infty)$.

A2. Найдите область значений функции $f(x) = 2^{\sin 2x}$.
1) $[-1; 1]$; 2) $[{}^1\!/2; 2]$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2]$.

A3. Решите уравнение $\cos^2 x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 0$.
1) ${}^\pi\!/2 + \pi n$, ${}^\pi\!/4 + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; 2) πk, $\pm{}^\pi\!/4 + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$; 3) ${}^\pi\!/2 + \pi n$, $\pm{}^\pi\!/4 + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm{}^\pi\!/4 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

B1. Для функции $f(x) = \sqrt{\log_{1/3}(2x-1)+2}$ найдите область определения.

B2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника с катетами $PR = 24$, $RQ = 7$.

B3. Для функции $f(x) = (2x-1)\cos\frac{\pi}{2}x$ найдите значение производной в точке $x_0 = 2$.

B4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 19, \\ 3\sin y = x + 1. \end{cases}$$

B5. Имеются два куска сплавов меди с цинком. В первом куске массы металлов соотносятся как 2:3, а во втором — как 5:4. Сплавив эти два куска, получили третий сплав, в котором массы металлов соотносятся как 104:121. Найдите массу третьего сплава, если известно, что масса первого куска на 1 кг больше массы второго.

C1. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{\log_2(2x + 15) - 2\log_2 x}{(|x - 3| - a)(x - 1)} \geqslant 0.$$

C2. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной 8. Основание H высоты SH пирамиды лежит на стороне AB ($AH = 3$, $SH = 12$). Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант № 4

A1. Решите неравенство $\dfrac{4x - 2}{3 - x} \geqslant \dfrac{5 - 2x}{3 - x}$.

1) $[{}^7\!/_6; 3)$; 2) $(-\infty; {}^7\!/_6] \cup (3; +\infty)$; 3) $[{}^7\!/_6; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $[{}^7\!/_6; +\infty)$.

A2. Найдите область значений функции $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2\sin x}$.

1) $[-2; 2]$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $[{}^1\!/_9; 9]$; 4) $(0; 9)$.

A3. Решите уравнение $\sin^2 x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$.

1) ${}^{\pi}/_{2}+\pi n$, $(-1)^{k+1}\,{}^{\pi}/_{3}+\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^{k}\,{}^{\pi}/_{3}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) πn, $(-1)^{k-1}\,{}^{\pi}/_{3} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; 4) πn, $(-1)^{k+1}\,{}^{\pi}/_{6} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

B1. Для функции $f(x) = \sqrt{\log_3(x-4) - 3}$ найдите область определения.

B2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника с катетами $AB = 12$, $BC = 9$.

B3. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{3x-5}{3x+5}$ в точке $x_0 = -1$.

B4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 - 9y - \sqrt{y^2 - 3y + 5} = 9, \\ 2\sin x = \sqrt{2}(y-5). \end{cases}$$

B5. Имеются два куска сплавов меди с цинком. В первом куске содержится 80 % меди, а во втором — 30 %. Сплавив эти два куска, получили третий сплав, в котором содержится 60 % меди. Найдите массу третьего сплава, если известно, что масса первого куска на 4 кг больше массы второго.

C1. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\frac{2\log_2 x - \log_2(3x+4)}{(|x-3| - a)(x-2)} \geqslant 0.$$

C2. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 8$ и боковой стороной 12. Основание H высоты SH пирамиды лежит на стороне AB ($BH = 4$, $SH = 6$). Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Предварительный тур, 4

Вариант № 1

1. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1+x}}{x-1} \geqslant \dfrac{5-x}{x-1}$.

2. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \dfrac{2|x - {}^{7\pi}/_{2}|}{x - {}^{7\pi}/_{2}}$.

3. Определите, при каких значениях x величины $5 \cdot 2^x$, $10 - \sqrt{x^2 - 1}$ и $20 \cdot 2^{-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ 2\sin(4x + 8y)\sin(3x + 10y) + 5\cos(7x + 2y) = 4. \end{cases}$$

5. Определите, при каких значениях параметра a пересечение множеств $(x - a + 1)^2 + (y - 2a - 3)^2 \leqslant 80$ и $(x - 2a + 3)^2 + (y - 4a + 1)^2 \leqslant 20a^2$ представляет собой круг. Постройте чертёж при $a = 2$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC перпендикулярны и имеют длину 3. Длина ребра SD равна 9. Найдите: 1) угол наклона ребра SD к плоскости основания; 2) наибольший возможный объём пирамиды $SABCD$.

Вариант № 2

1. Решите неравенство $\dfrac{4\sqrt{3-x}}{x+1} \leqslant \dfrac{2+x}{x+1}$.

2. Решите уравнение $\sin 3x + \cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}|x - {}^{5\pi}/_{2}|}{{}^{5\pi}/_{2} - x}$.

3. Определите, при каких значениях x величины $18 \cdot 3^x$, $6 - \sqrt{1 - x^2}$ и $2 \cdot 3^{-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \cos 3x = \cos y, \\ 2\cos(9x + 3y) + 9\sin(15x - 2y) = 4. \end{cases}$$

5. Определите, при каких значениях параметра a объединение множеств $(x - a - 2)^2 + (y + a - 1)^2 \leqslant 32$ и $(x - 2a + 1)^2 + (y + 2a - 4)^2 \leqslant 18a^2$ представляет собой круг. Постройте чертёж при $a = 3$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC перпендикулярны и имеют длину 6. Объём пирамиды $SABCD$ равен 72. Найдите: 1) площадь треугольника ACD; 2) наименьшую возможную длину ребра SD.

Вариант № 3

1. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{4 + x}}{x + 2} \geqslant \dfrac{2 - 3x}{x + 2}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \dfrac{2|x + {}^{11\pi}/_2|}{x + {}^{11\pi}/_2}$.

3. Определите, при каких значениях x величины $48 \cdot 2^x$, $12 - \sqrt{x^2 - 4}$ и $3 \cdot 2^{-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin 4x = \sin y, \\ 3\sin(12x + 3y)\sin(4x + 5y) + 10\cos(16x + 2y) = 6. \end{cases}$$

5. Определите, при каких значениях параметра a пересечение множеств $(x-a+1)^2+(y-3a+8)^2 \leqslant 90$ и $(x-2a-1)^2+$ $+(y-6a+2)^2 \leqslant 40a^2$ представляет собой круг. Постройте чертёж при $a=-2$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC перпендикулярны и имеют длину 4. Угол $\angle ADC$ равен 120°. Найдите: 1) угол наклона ребра SD к плоскости основания; 2) наибольший возможный объём пирамиды $SABCD$.

Вариант № 4

1. Решите неравенство $\dfrac{2\sqrt{-2-x}}{x+4} \leqslant \dfrac{10+x}{x+4}$.

2. Решите уравнение $\cos 3x - \sin 3x = -\dfrac{\sqrt{2}|x+3\pi|}{x+3\pi}$.

3. Определите, при каких значениях x величины $7 \cdot (1/3)^x$, $21-\sqrt{x^2-1}$ и $63 \cdot 3^x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = \cos 5y, \\ 6\cos(2x+10y) + 20\sin(6x-20y) = 9. \end{cases}$$

5. Определите, при каких значениях параметра a объединение множеств $(x-a+3)^2+(y+2a-11)^2 \leqslant 125$ и $(x-2a-1)^2+$ $+(y+4a-3)^2 \leqslant 45a^2$ представляет собой круг. Постройте чертёж при $a=-4$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC перпендикулярны и имеют длину 2. Объём пирамиды $SACD$ равен $^8/_3$. Найдите: 1) площадь основания пирамиды $ABCD$; 2) наименьшую возможную сумму длин боковых ребер пирамиды $SABCD$.

Заключительный тур олимпиады "Росатома", 1

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\dfrac{(\sqrt{2-x})^2}{2-x} + \dfrac{\lg(x+4)^2}{\log_{100}(x+4)} = 5.$

2. Решите неравенство $\dfrac{2^{x^2}-16}{x(x-2)} \geqslant 0.$

3. Решите уравнение $\sqrt{5\cos x - 1} = -\sqrt{2}\sin x.$

4. Решите неравенство
$$\sqrt{4\cos\frac{\pi x}{3} - 4\cos^2\frac{\pi x}{3} - 1}\left(\log_{1/3}\frac{17-2x}{x+9}\right) \geqslant 0.$$

5. а) Определите, при каких значениях параметра a система уравнений имеет единственное решение:
$$\begin{cases} |y-|x|-4| = 4, \\ (x-a)^2 + \left(y - 6 - \dfrac{2a}{3}\right)^2 = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$$
б) постройте графики уравнений при значении параметра $a = 0$.

6. Боковые рёбра DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ образуют с плоскостью основания ABC угол 30°, и сумма их длин равна 12. Ребро DC перпендикулярно ребру

AB. Найдите: а) высоту пирамиды, опущенную из вершины D; б) наибольшее при этих условиях значение объёма пирамиды $DABC$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $\dfrac{(\sqrt{x-3})^2}{3-x} + \dfrac{\log_2(5-x)^3}{\log_{16}(5-x)} = 11$.

2. Решите неравенство
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-6} - 9}{(2+x)(x-1)} \leqslant 0.$$

3. Решите уравнение $\sqrt{3-6\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x$.

4. Решите неравенство
$$\sqrt{4\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin^2\frac{\pi x}{3} - 3}\left(\log_{2/3}\frac{3x+22}{-x+14}\right) \leqslant 0.$$

5. а) Определите, при каких значениях параметра a система уравнений имеет единственное решение:
$$\begin{cases} |y-|x|-6| = 5, \\ (x-a)^2 + \left(y - 10 - \dfrac{4a}{5}\right)^2 = 2; \end{cases}$$
б) постройте графики уравнений при значении параметра $a = 5$.

6. Длины боковых рёбер DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ равны 4. Ребро DC перпендикулярно ребру AB и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите: а) высоту пирамиды, опущенную из вершины D; б) наибольшее при этих условиях значение объёма пирамиды $DABC$.

Вариант № 3

1. Решите уравнение

$$\frac{(\sqrt[4]{x+5})^4}{x+5} - \frac{\lg(x-1)}{\log_{100}(x-1)} = -1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3^{x^2-3} - \dfrac{1}{9}}{(1-x)(x+2)} \geqslant 0.$$

3. Решите уравнение $\sqrt{1 - 7\sin x} = \sqrt{6}\cos x$.

4. Решите неравенство

$$\left(\log_2 \frac{7-x}{2x+19}\right)\sqrt{\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{\pi x}{2}\right)^2 - 2} \leqslant 0.$$

5. а) Определите, при каких значениях параметра a система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} |y - |x| - 4| = 4, \\ (x-a)^2 + \left(y - 6 - \dfrac{2a}{3}\right)^2 = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$$

б) постройте графики уравнений при значении параметра $a = 0$.

6. Длины боковых рёбер DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ равны 5. Высота пирамиды, опущенная из вершины D, равна 3. Найдите: а) угол наклона ребра DC к плоскости основания; б) наибольшее при этих условиях значение объёма пирамиды $DABC$.

Вариант № 4

1. Решите уравнение

$$\frac{(\sqrt{4-x})^2}{4-x} - \frac{\lg_3 (x+2)^4}{\log_{1/9}(2+x)} = 9.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2^{x^2-4}-32}{(2+x)(x-3)} \leqslant 0.$$

3. Решите уравнение $\sqrt{18+21\sin x} = -\sqrt{10}\cos x$.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{2\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} - 3\cos^2\frac{\pi x}{2} - \sin^2\frac{\pi x}{2}}\left(\log_2\frac{x+9}{25-3x}\right) \geqslant 0.$$

5. а) Определите, при каких значениях параметра a система уравнений имеет единственное решение;

$$\begin{cases} |y+|x|-3| = 4, \\ (x-a)^2 + \left(y-1-\dfrac{2a}{3}\right)^2 = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$$

   б) постройте графики уравнений при значении параметра $a = 3$.

6. Длины боковых рёбер DA, DB и DC треугольной пирамиды $DABC$ равны 8. Угол между рёбрами DA и DB равен 60°, а плоскость грани DAB наклонена к плоскости грани ABC под углом 30°. Найдите: а) высоту пирамиды, опущенную из вершины D; б) наибольшее при этих условиях значение объёма пирамиды $DABC$.

Заключительный тур олимпиады "Росатома", 2

Вариант № 1

1. Решите неравенство $\dfrac{|x-5|-3}{x-6} \geqslant \dfrac{x-8}{x-6}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2$.

3. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 4. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

4. Решите неравенство $\cos\dfrac{\pi x}{3} \cdot \log_2 \dfrac{20}{35+2x-x^2} > 0$.

5. Определите, при каких значениях параметра k система
$$\begin{cases} x^2 = 4y, \\ x + k^2 y - 4k^2 - 1 = 0, \\ 2y - x - 4 \geqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (точка S — вершина) рёбра основания имеют длину 3, а высота в $\sqrt{3}$ длиннее рёбер основания. Точка E — середина апофемы грани ASB. Найдите: 1) объём пирамиды $SABCD$; 2) угол между прямой DE и плоскостью ASC.

Вариант № 2

1. Решите неравенство $\dfrac{6+|x-3|}{x+2} \leqslant \dfrac{9-x}{x+2}$.

2. Решите уравнение $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$.

3. Произведение второго и шестого членов геометрической прогрессии равно 3. Найдите произведение квадратов первых 7 членов этой прогрессии.

4. Решите неравенство $\sin\dfrac{2\pi x}{3}\cdot\log_{1/3}\dfrac{15}{10x-9-x^2}<0$.

5. Определите, при каких значениях параметра k система

$$\begin{cases} x^2=-4y, \\ y-k^2x+5+2k^2=0, \\ y-x+3\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и G — середины отрезков A_1B_1 и DC_1 соответственно, точка F лежит на отрезке BE, причем $3|BF|=|BE|$, $|AB|=|AD|=4$, $|AA_1|=\sqrt{8/3}|AB|$. Найдите: 1) объём пирамиды $A_1B_1D_1A$; 2) угол между прямой FG и плоскостью AA_1C_1.

Вариант № 3

1. Решите неравенство $\dfrac{5-|x+3|}{x+1}\geqslant\dfrac{2-x}{x+1}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{\log_{\sqrt[6]{x}}(7x^2)}\cdot\log_7 x=-6$.

3. Сумма пятого и восьмого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 12 членов этой прогрессии.

4. Решите неравенство $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\cdot\log_3\dfrac{-10}{x^2+9x+8}>0$.

5. Определите, при каких значениях параметра k система

$$\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y + k^3x - 4 + k^3 = 0, \\ 2y - x - 12 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (точка S — вершина) рёбра основания имеют длину 2, а высота в ${}^5\!/\!\sqrt{6}$ длиннее рёбер основания. Точка D — середина апофемы грани ASC. Найдите: 1) объём пирамиды $SABC$; 2) угол между прямой BD и плоскостью, проходящей через ребро SC и середину ребра AB.

Вариант № 4

1. Решите неравенство $\dfrac{6 - |x+2|}{x+5} \geqslant \dfrac{8+x}{x+5}$.

2. Решите уравнение $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x$.

3. Произведение третьего и восьмого членов геометрической прогрессии равно 2. Найдите произведение первых 10 членов этой прогрессии.

4. Решите неравенство $\sin\dfrac{\pi x}{2} \cdot \log_{1/2} \dfrac{18}{14 + 5x - x^2} < 0$.

5. Определите, при каких значениях параметра k система

$$\begin{cases} x^2 = -4y, \\ x + k^3y - 1 + 4k^3 = 0, \\ 2y - x + 12 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

6. У правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ длины рёбер основания равны 5, а высота в 4 раза длиннее рёбер основания. Точка D — середина ребра A_1B_1, точки E и F лежат на отрезках AD и CB_1 соответственно, причем $|AE| = \frac{1}{2}|AD|$, $|CF| = \frac{1}{4}|CB_1|$. Найдите: 1) объём пирамиды $A_1B_1C_1A$; 2) угол между прямой EF и плоскостью, проходящей через ребро BB_1 и середину ребра AC.

Выездной тур, 1

Вариант № 1

1. Решите уравнение $|2x+5| - 2|x+1| = 3$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2+3x-4} \geqslant 2(x-1)$.

3. Решите неравенство $(1+3\sin 2x+8\cos^2 x)\log_2 \dfrac{2\sin x+1}{3} \geqslant 0$.

4. Из молока, жирность которого составляет 3 %, изготавливают творог жирностью 7 % и сметану жирностью 15 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 1 т молока, если известно, что сметаны производится на 60 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\dfrac{5}{8}\right)^x - a\right| < 0{,}5$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Радиус оснований цилиндра $R = 1$, а высота цилиндра $h = 2$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной треугольной пирамиды.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $|2-3x|-3|x+2|=8$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2-2x-3} > \sqrt{3}(x-3)$.

3. Решите неравенство $(4-3\cos^2 x-2\sin 2x)\log_{1/2}\dfrac{1-3\cos x}{4}\leqslant 0$.

4. Из молока, жирность которого составляет 4 %, изготавливают творог жирностью 9 % и сметану жирностью 10 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 600 кг молока, если известно, что сметаны производится на 40 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\dfrac{3}{2}\right)^x - a\right| < \dfrac{1}{2}$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Радиус оснований цилиндра $R=1$, а высота цилиндра $h=2$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной четырёхугольной пирамиды.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $|2x+1|+2|x-3|=7$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2+4x-5} \geqslant -2(x+5)$.

3. Решите неравенство $(9-5\sin^2 x+6\sin 2x)\log_3 \dfrac{3\sin x+1}{4} \geqslant 0$.

4. Из молока, жирность которого составляет 5 %, изготавливают творог жирностью 10 % и сметану жирностью 12 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 500 кг молока, если известно, что сметаны производится на 50 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{3}{4}\right)^x - a\right| < \frac{3}{8}$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Радиус оснований цилиндра $R = 1$, а высота цилиндра $h = 3$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной треугольной пирамиды.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $|4 + 3x| + 3|x - 1| = 7$.

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 2x - 8} > -\sqrt{3}(x + 4)$.

3. Решите неравенство

$$(21\sin^2 x - 10\sin 2x + 4)\log_{2/5}\frac{1 - 4\cos x}{5} \leqslant 0.$$

4. Из молока, жирность которого составляет 3,5 %, изготавливают творог жирностью 4 % и сметану жирностью 20 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 800 кг молока, если известно, что сметаны производится на 20 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{5}{3}\right)^x - a\right| < 0{,}6$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании пирамиды, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Радиус оснований цилиндра $R = 1$, а высота цилиндра $h = 3$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной четырёхугольной пирамиды.

Выездной тур, 2

Вариант № 1

1. Решите уравнение $(x^2 - 8x)^2 + 3(x-4)^2 = 76$.

2. Решите уравнение $9^{\log_{1/3}(x+2)} = 7^{\log_{1/7}(2x^2+3x+2)}$.

3. Решите уравнение $|\sqrt{x-6} - 2| + |\sqrt{x-6} - 3| = 1$.

4. Найдите число корней уравнения $\cos 2x = \sin 18^\circ$, лежащих на отрезке $[-550^\circ; 400^\circ]$.

5. Определите, при каких значениях параметра a функция $f(x) = (16-6a)x - (a+2)\sin 2x - 12\sin x + a^2$ имеет на интервале $(-\pi; -{}^{\pi}/_{3})$ единственную критическую точку (минимум).

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ длина ребра $AB = 8$. Треугольники ABC и ABD — равнобедренные ($AC = CB$, $AD = DB$) с высотами $CH = 6$ и $DH = 6$. Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите минимальную площадь сечения пирамиды, которое проходит через среднюю линию MN треугольника ABC ($MN \parallel AB$) и пересекает грань ABD.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $(x^2 + 6x)^2 - 4(x + 3)^2 = 9$.

2. Решите уравнение $25^{\log_{1/5}(3-x)} = 3^{\log_{1/3}(2x^2-x+3)}$.

3. Решите уравнение $|\sqrt{x+2} - 3| + |5 - \sqrt{x+2}| = 2$.

4. Найдите число корней уравнения $\sin 2x = \cos 48^\circ$, лежащих на отрезке $[-450^\circ; 500^\circ]$.

5. Определите, при каких значениях параметра a функция $f(x) = (10a + 6)x + (a - 5)\sin 2x - 8\cos x - 3(a + 2)$ имеет на интервале $\left(-{}^{\pi}/2; {}^{\pi}/6\right)$ единственную критическую точку (максимум).

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ длина ребра $AB = 8$. Треугольники ABC и ABD — равнобедренные ($AC = CB$, $AD = DB$) с высотами $CH = \sqrt{10}$ и $DH = 4$. Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите минимальную площадь сечения пирамиды, которое проходит через среднюю линию MN треугольника ABC ($MN \parallel AB$) и пересекает грань ABD.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $(x^2 - 4x)^2 + 2(x - 2)^2 = 43$.

2. Решите уравнение $16^{\log_{1/4}(x+3)} = 5^{\log_{1/5}(3x^2+2x+3)}$.

3. Решите уравнение $|\sqrt{x+1} - 4| + |\sqrt{x+1} - 6| = 2$.

4. Найдите число корней уравнения $\cos 3x = \sin 27^\circ$, лежащих на отрезке $[-350^\circ; 450^\circ]$.

5. Определите, при каких значениях параметра a функция $f(x) = (14-12a)x + (2a+1)\sin 2x - 16\sin x + (a+1)^2$ имеет на интервале $\left(-\pi; -{}^{\pi}/3\right)$ единственную критическую точку (максимум).

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ длина ребра $AB = 8$. Треугольники ABC и ABD — равнобедренные ($AC = CB$, $AD = DB$) с высотами $CH = \sqrt{13}$ и $DH = 5$. Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите минимальную площадь сечения пирамиды, которое проходит через среднюю линию MN треугольника ABC ($MN \parallel AB$) и пересекает грань ABD.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $(x^2+10x)^2 - 2(x+5)^2 = 49$.

2. Решите уравнение $4^{\log_{1/2}(5-x)} = 11^{\log_{1/11}(2x^2-3x+7)}$.

3. Решите уравнение $|\sqrt{x-3}-5| + |2-\sqrt{x-3}| = 3$.

4. Найдите число корней уравнения $\sin 3x = \cos 51^\circ$, лежащих на отрезке $[-250^\circ; 550^\circ]$.

5. Определите, при каких значениях параметра a функция $f(x) = (5-2a)\sin 2x + 3\sin x - 6x - (a-\pi)^2$ имеет на интервале $\left(-{}^{2\pi}/3; 0\right)$ единственную критическую точку (минимум).

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ длина ребра $AB = 8$. Треугольники ABC и ABD — равнобедренные ($AC = CB$, $AD = DB$) с высотами $CH = 3\sqrt{3}$ и $DH = 7$. Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите минимальную площадь сечения пирамиды, которое проходит через среднюю линию MN треугольника ABC ($MN \parallel AB$) и пересекает грань ABD.

Выездной тур, 3

Вариант № 1

1. Решите систему

$$\begin{cases} 5y^2 - 18y - 8 = 0, \\ |x - y| + |2x + y| \leqslant 3y. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 4) \geqslant -2$.

3. Решите уравнение

$$(3\sin^2 3x - 7\sin 3x + \cos^2 3x - 5)\left(\frac{\sqrt{4x + 48 - 4x^2}}{\sqrt{x + 12 - x^2}} - 2^x\right) = 0.$$

4. а) Найдите область значений функции $y = 2^{1/\sin x}$.
   б) При каких значениях параметра a неравенство

$$4^{1/\sin x} - 2(a - 1)2^{1/\sin x} - 2a + 5 \geqslant 0$$

   выполняется при всех x?

5. Из молока, жирность которого составляет 4 %, изготавливают творог жирностью 9 % и сметану жирностью 10 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 600 кг молока, если известно, что сметаны производится на 40 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании цилиндра, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Радиус основания цилиндра $R = 1$, а высота цилиндра $H = 5$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной четырёхугольной пирамиды.

Вариант № 2

1. Решите систему

$$\begin{cases} 4y^2 + 5y - 21 = 0, \\ |x+y| + |3x - 2y| < -4y. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{1/8}(x^2 - 2) \geqslant -1/3$.

3. Решите уравнение

$$(\cos 4x - 5\cos 2x - 2)\left(\frac{\sqrt{9x + 54 - 9x^2}}{\sqrt{x + 6 - x^2}} - 3^x\right) = 0.$$

4. а) Найдите область значений функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/\cos x}$.

   б) При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2/\cos x} + 2(a+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{1/\cos x} - a \geqslant 0$$

   выполняется при всех x?

5. Из молока, жирность которого составляет 6 %, изготавливают творог жирностью 10 % и сметану жирностью 15 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 600 кг молока, если известно, что сметаны производится на 40 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании цилиндра, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Высота цилиндра $H = 4$, а радиус основания цилиндра $R = 1$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной треугольной пирамиды.

Вариант № 3

1. Решите систему

$$\begin{cases} 2y^2 - 7y - 15 = 0, \\ |y - x| + |2y + x| \leqslant 2y + 3. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{1/3}(x^2 - 1) \geqslant -3$.

3. Решите уравнение

$$(\cos^2 2x + \cos 4x - 2\cos 2x - 4)\left(\frac{\sqrt{64x+80-16x^2}}{\sqrt{4x+5-x^2}} - 3^x\right) = 0.$$

4. а) Найдите область значений функции $y = 3^{1/\sin x}$.
   б) При каких значениях параметра a неравенство

$$9^{1/\sin x} - 2(a-3)3^{1/\sin x} - 1 + a > 0$$

   выполняется при всех x?

5. Из молока, жирность которого составляет 5 %, изготавливают творог жирностью 10 % и сметану жирностью 12 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 500 кг молока, если известно, что сметаны производится на 50 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании цилиндра, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Радиус основания цилиндра $R = 2$, а высота цилиндра $H = 6$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной четырёхугольной пирамиды.

Вариант № 4

1. Решите систему
$$\begin{cases} 3x^2 + 7x - 20 = 0, \\ |y + x| + |2y - x| < -3x + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{1/9}(x^2 - 4) \geqslant -1/2$.

3. Решите уравнение
$$(\sin 3x - \cos 6x - 2)\left(\frac{\sqrt{200x + 50 - 25x^2}}{\sqrt{8x + 2 - x^2}} - \left(\frac{1}{5}\right)^x\right) = 0.$$

4. а) Найдите область значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\cos x}$.

   б) При каких значениях параметра a неравенство
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/\cos x} - 2(a - 5)\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\cos x} - 5 + a \geqslant 0$$
   выполняется при всех x?

5. Из молока, жирность которого составляет 3,5 %, изготавливают творог жирностью 4 % и сметану жирностью 20 %. При этом остаётся сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получается из 800 кг молока, если известно, что сметаны производится на 20 % меньше, чем творога? Ответ округлите в меньшую сторону с точностью до 1 кг.

6. Назовём пирамиду описанной около цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в основании цилиндра, а окружность верхнего основания цилиндра касается всех боковых граней. Высота цилиндра $H = 6$, а радиус основания цилиндра $R = 3$. Найдите минимально возможный объём описанной около цилиндра правильной треугольной пирамиды.

Выездной тур, 4

Вариант № 1

1. Найдите все корни уравнения $\dfrac{|3x-2|-1}{|x+3|-4} = |-3|$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 10\log_4(x+3) + 6\log_{1/2\sqrt{2}}(x+3) \leqslant 5, \\ |4-\sqrt{x+2}| \leqslant x-6. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\sin 7x \cos 3x - \sin 2x \cos 8x = 0$.

4. Решите неравенство

$$\frac{(x+4)\sqrt{10-x}\,\log_{(2-\sin x)}(x+5)}{x+2} \geqslant 0.$$

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\dfrac{5}{8}\right)^x - a\right| < 0{,}5$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Радиус основания конуса равен R. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса, при всех значениях его образующей l.

Вариант № 2

1. Найдите все корни уравнения $\dfrac{|x-1|-2x}{2|x+2|-5x-3} = |-1|$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2\log_9(x-4) + 3\log_{3\sqrt{3}}(x-4) \leqslant 6, \\ 1-x \leqslant \sqrt{5-|4-x|}. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\cos 5x \cos 7x + \sin 3x \sin 9x = 0$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x}\log_{(2+\cos x)}(2-x)}{x^2+4x-5} < 0.$$

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - a\right| < 0{,}5$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Образующая конуса равна l. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса, при каждом значении α угла наклона образующей к плоскости основания.

Вариант № 3

1. Найдите все корни уравнения $\dfrac{|2x+1|}{|x+1|+5x+1} = -\left|-\dfrac{1}{2}\right|$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 15\log_8(x+1) + 10\log_{1/4\sqrt{2}}(x+1) \leqslant 4, \\ |\sqrt{x-1}-2| \leqslant x-9. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\sin 2x \cos 6x - \sin x \cos 5x = 0$.

4. Решите неравенство

$$\frac{(x-3)\sqrt{9-x}\log_{(2+\sin x)}(x+4)}{x} \geqslant 0.$$

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{3}{4}\right)^x - a\right| < \dfrac{3}{8}$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Образующая конуса равна l. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса, при всех значениях его радиуса основания R.

Вариант № 4

1. Найдите все корни уравнения $\dfrac{|x+5|-3x+1}{|x-2|+2x+1} = |-2|$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 10\log_{9\sqrt{3}}(x-2) + 9\log_{1/27}(x-2) \leqslant 2, \\ \sqrt{7-|3-x|} \geqslant x-4. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\sin 3x \sin 5x + \cos 2x \cos 6x = 0$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3+x}\log_{(2-\cos x)}(3-x)}{x+2-x^2} \leqslant 0.$$

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\dfrac{5}{3}\right)^x - a\right| < 0{,}6$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. Радиус основания конуса равен R. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса, при каждом значении α угла, который образует ось конуса с его образующей.

Выездной тур, 5

Вариант № 1

1. Решите неравенство $(|x+2|-3)\sqrt{49-x^2} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $\sin(3\cos x) = 1/2$.

3. Решите уравнение $2^{2x} \cdot 2^{5x} \cdot 2^{8x} \cdot \ldots \cdot 2^{104x} = 32^{371}$.

4. Решите уравнение

$$\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 2(|x-3|+1) \sin \frac{\pi x}{2} - 3(|x-3|+1)^2 = 0.$$

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{4\cos \frac{\pi x}{3} - 4\cos^2 \frac{\pi x}{3} - 1} \cdot \log_{1/3} \frac{a-2x}{x+11} \geqslant 0$$

имеет ровно 2 решения?

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 8$, $SC = SD = 6$, углы ASB и CSD равны 90°, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань CSD перпендикулярна плоскости основания.

Вариант № 2

1. Решите неравенство $(|x-3|-2)\sqrt{16-x^2} \leqslant 0$.

2. Решите уравнение $\cos(4\sin x) = -\sqrt{3}/2$.

3. Решите уравнение $3^{4x} \cdot 3^{6x} \cdot 3^{8x} \cdot \ldots \cdot 3^{102x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1325}$.

4. Решите уравнение

$$2\cos^2(\pi(x+1)) - 7(|x-1|+1)\cos(\pi(x+1)) + 5(|x-1|+1)^2 = 0.$$

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{\left(\sin \frac{\pi x}{4} - \cos \frac{\pi x}{4}\right)^2 - 2} \cdot \log_2 \frac{7-x}{2x+a} \leqslant 0$$

имеет ровно 2 решения?

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 10$, $SC = SD = 24$, углы ASB и CSD равны 60°, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань ASB перпендикулярна плоскости основания.

Вариант № 3

1. Решите неравенство $(|x+1|-2)\sqrt{25-x^2} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $\sin(5\cos x) = -1$.

3. Решите уравнение $4^x \cdot 4^{3x} \cdot 4^{5x} \cdot \ldots \cdot 4^{89x} = 8^{675}$.

4. Решите уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(4+x)\right)+3(|x+2|+1)\sin\left(\frac{\pi}{4}(4+x)\right)-5(|x+2|+1)^2=0.$$

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{4\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{3}-4\sin^2\frac{\pi x}{3}-3}\cdot\log_{2/3}\frac{3x+a}{14-x} \leqslant 0$$

имеет ровно 2 решения?

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 9$, $SC = SD = 12$, углы ASB и CSD равны 90°, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань ASB перпендикулярна плоскости основания.

Вариант № 4

1. Решите неравенство $(4 - |x + 2|)\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $\cos(2\sin x) = 0$.

3. Решите уравнение $9^x \cdot 9^{5x} \cdot 9^{9x} \cdot \ldots \cdot 9^{137x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{805}$.

4. Решите уравнение

$$2\cos^2(\pi(x-1)) - 4(|x+1|+1)\cos(\pi(x-1)) + 2(|x+1|+1)^2 = 0.$$

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$\sqrt{\left(\sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4}\right)^2 - 2} \cdot \log_{4/5}\frac{5-x}{3x+a} \leqslant 0$$

имеет ровно 2 решения?

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 15$, $SC = SD = 36$, углы ASB и CSD равны $60°$, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань ASB перпендикулярна плоскости основания.

Выездной тур, 6

Вариант № 1

1. Решите неравенство $\frac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{9 - x^2}} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $3\sin x - 4\sin^3 x - \cos 2x = 0$.

3. Найдите все значения x, при которых числа $2\sqrt{x + 3}$, 7, $2\sqrt{3x - 2}$, взятые в указанном порядке, являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Найдите $\log_{-x}(x + x^2 + 3x^3 + 2x^4)$, если $1 + 3x^2 + 2x^3 = 0$.

5. При каждом положительном значении параметра a найдите число корней уравнения $\big||2x| - 4\big| = |x^2 - a|$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 8$, $SC = SD = 6$, углы ASB и CSD равны 90°, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань CSD перпендикулярна плоскости основания.

Вариант № 2

1. Решите неравенство $\dfrac{|x-3| - |x+1|}{\sqrt{25 - x^2}} \leqslant 0$.

2. Решите уравнение $\sin 5x - 2\cos^2 2x + 1 = 0$.

3. Найдите все значения x, при которых числа $2\sqrt{10 - 3x}$, $2\sqrt{7 - x}$, -1, взятые в указанном порядке, являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Найдите $\log_x(x^5 - 3x^4 - x^2)$, если $x^3 - 3x^2 - 2 = 0$.

5. При каждом положительном значении параметра a найдите число корней уравнения $\left|\left|\dfrac{4}{3}x\right| - 4\right| = |x^2 - a|$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 10$, $SC = SD = 24$, углы ASB и CSD равны 60°, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань ASB перпендикулярна плоскости основания.

Вариант № 3

1. Решите неравенство $\dfrac{|x+5|-|x-3|}{\sqrt{9-x^2}} \leqslant 0$.

2. Решите уравнение $4\cos^3 x - 3\cos x + 2\sin^2 x - 1 = 0$.

3. Найдите все значения x, при которых числа $\sqrt{x+10}$, 3, $\sqrt{x-2}$, взятые в указанном порядке, являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Найдите $\log_{-x}(4x^5 + 3x^3 + 3x^2)$, если $2 + 3x + 4x^3 = 0$.

5. При каждом положительном значении параметра a найдите число корней уравнения $\left|\left|\dfrac{4}{5}x\right| - 4\right| = |x^2 - a|$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 9$, $SC = SD = 12$, углы ASB и CSD равны 90°, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань ASB перпендикулярна плоскости основания.

Вариант № 4

1. Решите неравенство $\dfrac{|x-4|-|x+2|}{\sqrt{25-x^2}} \geqslant 0$.

2. Решите уравнение $\sin 7x + 1 - 2\cos^2 3x = 0$.

3. Найдите все значения x, при которых числа $\sqrt{x+6}$, $\sqrt{2x-5}$, -1, взятые в указанном порядке, являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Вычислите $\log_x(3x - 6x^2 + 13x^3 - 24x^4)$, если $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 = 0$.

5. При каждом положительном значении параметра a найдите число корней уравнения $\big||2x|-8\big| = |x^2-a|$.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ длины рёбер $SA = SB = 15$, $SC = SD = 36$, углы ASB и CSD равны $60°$, рёбра AB и CD параллельны. а) Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём пирамиды? б) Подсчитайте площадь основания пирамиды при условии, что грань ASB перпендикулярна плоскости основания.

Выездной тур, 7

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\sqrt{(x+4)^2} - |2-3x| = 2x-6$.

2. Решите неравенство $\dfrac{\log_{1/3}(5-x)+2}{x^3-8x^2} \leqslant 0$.

3. Сумма второго и пятого членов возрастающей целочисленной арифметической прогрессии равна 14, а произведение первого и третьего равно (-15). Найдите сумму всех положительных трёхзначных членов прогрессии.

4. В треугольнике ABC длины сторон $AB = 8$ и $BC = 4$. Синус угла ACB равен $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Окружность касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC в точках D и E. Найдите: а) длину стороны AC; б) длину отрезка DE.

5. а) Найдите область значений функции $y = 2^{1/\sin x}$.
   б) При каких значениях параметра a неравенство
$$4^{1/\sin x} - 2(a-1)2^{1/\sin x} - 2a + 5 > 0$$
выполняется при всех x?

6. Радиус основания конуса равен R. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса при всех значениях образующей l.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $\sqrt{(2x-4)^2}+|x+1|=5-x$.

2. Решите неравенство $\dfrac{(\log_2(3x+5)-3)^2}{x^2+4x}\leqslant 0$.

3. Найдите сумму положительных трёхзначных членов возрастающей целочисленной арифметической прогрессии, если известно, что сумма второго и удвоенного шестого членов равна 1, а произведение третьего и пятого равно (-16).

4. В треугольнике PQR длины сторон $PQ=12$ и $QR=4$. Синус угла QRP равен $\sqrt{35}/6$. Окружность касается стороны PR и продолжений сторон PQ и QR в точках M и N. Найдите: а) длину стороны PR; б) длину отрезка MN.

5. а) Найдите область значений функции $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/\cos x}$.

   б) При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2/\cos x}+2(a+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{1/\cos x}-a\geqslant 0$$

   выполняется при всех x?

6. Образующая конуса равна l. Найдите площадь максимального сечения конуса, проходящего через вершину при каждом значении α угла наклона образующей к плоскости основания.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $|3x-9|-\sqrt{(1-x)^2}=10-4x$.

2. Решите неравенство $\dfrac{\log_{1/2}(2-x)+3}{x^3-2x^2+x}\geqslant 0$.

3. Сумма второго и удвоенного четвёртого членов возрастающей целочисленной арифметической прогрессии равна 3, а произведение третьего и шестого членов равно (-17). Найдите сумму всех положительных трёхзначных членов прогрессии.

4. В треугольнике ABC длины сторон $AB=12$ и $BC=8$. Синус угла ACB равен ${}^{2\sqrt{2}}/_{3}$. Окружность касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC в точках M и N. Найдите: а) длину стороны AC; б) длину отрезка MN.

5. а) Найдите область значений функции $y=3^{1/\sin x}$.
   б) При каких значениях параметра a неравенство

$$9^{1/\sin x}-2(a-3)3^{1/\sin x}+(a-1)>0$$

   выполняется при всех x?

6. Образующая конуса равна l. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса при каждом значении R радиуса основания конуса.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $|5-x|+\sqrt{(1-2x)^2}=3x-6$.

2. Решите неравенство $\dfrac{(\log_3(5-4x)-2)^2}{x^2+x-6}\geqslant 0$.

3. Разность между седьмым и утроенным четвёртым членом возрастающей целочисленной арифметической прогрессии равна 7, а произведение второго и пятого членов равно (-20). Найдите сумму всех положительных трёхзначных членов прогрессии.

4. В треугольнике PQR длины сторон $PQ = 10$ и $QR = 4$. Синус угла PRQ равен ${}^{2\sqrt{6}}/_{5}$. Окружность касается стороны PR и продолжений сторон PQ и QR в точках M и N. Найдите: а) длину стороны PR; б) длину отрезка MN.

5. а) Найдите область значений функции $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/\cos x}$.

   б) При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/\cos x} + 2(5-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\cos x} + a - 5 \geqslant 0$$

   выполняется при всех x?

6. Радиус основания конуса равен R. Найдите максимальную площадь сечения конуса, проходящего через вершину конуса при всех значениях α угла, который образует образующая с осью конуса.

Выездной тур, 8

Вариант № 1

1. Решите систему

$$\begin{cases} 5x^2 - 18x - 8 = 0, \\ |x+y| + |2x-y| \leqslant 3x. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{0,5}(x^2 - 4) \geqslant -2$.

3. Решите уравнение

$$(3+3\sin^2 3x-7\sin 6x+\cos^2 3x)\left(\frac{\sqrt{4x+48-4x^2}}{\sqrt{x+12-x^2}}-2^x\right)=0.$$

4. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{5}{3}\right)^x-a\right|<0{,}6$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

5. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Точка E расположена на прямой AB так, что $AE:BE=3:1$. Прямая CE пересекает прямую BD в точке O. Площадь треугольника BCO равна 15. Найдите площадь треугольника ABC.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 3. Длина ребра SD равна 9. Найдите: а) угол наклона ребра SD к плоскости основания; б) наибольшее возможное при этих условиях значение объёма пирамиды $SABCD$.

Вариант № 2

1. Решите систему

$$\begin{cases}4x^2+5x-21=0,\\ |x-y|+|3x+2y|<-4x.\end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{1/8}(x^2-2)\geqslant -1/3$.

3. Решите уравнение

$$(2+\cos 4x-5\cos^2 2x-2\sin 4x)\left(\frac{\sqrt{9x+54-9x^2}}{\sqrt{x+6-x^2}}-3^x\right)=0.$$

4. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{3}{4}\right)^x - a\right| < 0{,}375$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

5. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Точка E расположена на прямой AB так, что $AE : BE = 5 : 2$. Прямая CE пересекает прямую BD в точке O. Площадь треугольника BCO равна 10. Найдите площадь треугольника ABC.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 6. Объём пирамиды $SABCD$ равен 72. Найдите: а) площадь треугольника ACD; б) наименьшее возможное при этих условиях значение длины ребра SD.

Вариант № 3

1. Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x - 15 = 0, \\ |y + x| + |2y - x| \leqslant 2x + 3. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{1/3}(x^2 - 1) \geqslant -3$.

3. Решите уравнение

$$(\cos 4x + \cos^2 2x - 2\sin 4x + 1)\left(\frac{\sqrt{64x+80-16x^2}}{\sqrt{4x+5-x^2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = 0.$$

4. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{3}{2}\right)^x - a\right| < 0{,}75$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

5. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Точка E расположена на прямой AB так, что $AE : BE = 7 : 3$. Прямая CE пересекает прямую BD в точке O. Площадь треугольника BCO равна 12. Найдите площадь треугольника ABC.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 4. Угол $\angle ADC$ равен 120°. Найдите: а) угол наклона ребра SD к плоскости основания; б) наибольшее возможное при этих условиях значение объёма пирамиды $SABCD$.

Вариант № 4

1. Решите систему

$$\begin{cases} 3y^2 + 7x - 20 = 0, \\ |y - x| + |2y + x| < -3y + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\log_{1/9}(x^2 - 4) \geqslant -1/2$.

3. Решите уравнение

$$(\sin 6x - \sin^2 3x - \cos 6x - 2)\left(\frac{\sqrt{200-50x-25x^2}}{\sqrt{8-2x-x^2}} - \left(\frac{1}{5}\right)^x\right) = 0.$$

4. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. Точка E расположена на прямой AB так, что $AE : BE = 8 : 3$. Прямая CE пересекает прямую BD в точке O. Площадь треугольника BCO равна 6. Найдите площадь треугольника ABC.

5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство $\left|\left(\frac{5}{4}\right) - a\right| < 0{,}625$ имеет ровно 2 целочисленных решения.

6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC попарно перпендикулярны и имеют длину 2. Объём пирамиды $SACD$ равен $^4/_3$. Найдите: а) площадь основания пирамиды $ABCD$; б) наименьшее возможное при этих условиях значение суммы длин боковых рёбер $SABCD$.

Экзамен на платное отделение

Вариант № 1

1. Решите неравенство $2(3-5x)-3\dfrac{16-x^2}{4-x}\geqslant 7$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-y=3, \\ |x+2y|=6. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\cos 2x - \sin x = 0$.

4. Решите неравенство $(x-1)\Big(2^x-\dfrac{1}{4}\Big)\geqslant 0$.

5. Катет AB прямоугольного треугольника ABC равен 10, а гипотенуза AC равна 26. Найдите: а) $\operatorname{tg}\angle BAC$; б) радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Велотренажёр в спортивном магазине стоил 16 тыс. рублей, а в супермаркете такой же тренажёр — 20 тыс. рублей. После выходных цены на все товары в спортивном магазине возросли на 20 %, а в супермаркете цены на тренажёры понизились на x %. При каком значении x цены окажутся равными?

Вариант № 2

1. Решите неравенство $5\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)-4(2x+1)\geqslant -20$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=4, \\ |2x-y|=11. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\cos 2x-\cos x=0$.

4. Решите неравенство $(x+5)\left(3^x-\dfrac{1}{27}\right)\leqslant 0$.

5. Катеты AB и BC прямоугольного треугольника ABC равны 12 и 8 соответственно. Найдите: а) $\sin\angle BAC$; б) радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Стоимость проезда из города A в город B на поезде — 240 рублей, а на автобусе — 200 рублей. После праздников цены на билеты на железнодорожный транспорт уменьшились на 10 %, а на автотранспорт — повысились на x %. При каком значении x цены окажутся равными?

Вариант № 3

1. Решите неравенство $3(2x-1)-2\dfrac{x^2-1}{x-1}\geqslant -9$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=-2, \\ |2x-3y|=11. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\cos 2x-\cos x=0$.

4. Решите неравенство $(x-2)\left(27^x-\dfrac{1}{3}\right)>0$.

5. Катет AB прямоугольного треугольника ABC равен 48, а гипотенуза AC равна 50. Найдите: а) $\operatorname{tg}\angle BAC$; б) радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Велотренажёр в спортивном магазине стоил 24 тыс. рублей, а в супермаркете такой же тренажёр — 20 тыс. рублей. После выходных цены на все товары в спортивном магазине понизили на 20 %, а в супермаркете цены на тренажёры понизили на x %. При каком значении x цены окажутся равными?

Вариант № 4

1. Решите неравенство $4\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)-5(2x+1)\geqslant 25$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-x=3, \\ |2x+3y|=4. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\cos 2x+\sin x=0$.

4. Решите неравенство $(x-5)(4^x-2)>0$.

5. Катеты AB и BC прямоугольного треугольника ABC равны 24 и 7 соответственно. Найдите: а) $\sin\angle BAC$; б) радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

6. Стоимость проезда из города A в город B на поезде — 180 рублей, а на автобусе — 120 рублей. После праздников цены на билеты на железнодорожный транспорт уменьшились на 20 %, а на автотранспорт — повысились на x %. При каком значении x цены окажутся равными?

Вступительный экзамен в лицеи при МИФИ (9 класс)

Вариант № 1

1. Решите неравенство

$$\frac{8x^3+1}{2x+1} - 3(x^2-2) + 3\frac{1-9x^2}{1+3x} \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$(3x^2+y-1)^2 + |xy+4x+2| = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ в точке $x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}$.

4. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов навстречу друг другу и встречаются через 1 ч 30 мин. Расстояние между городами 210 км. Известно, что 40 км второй проезжает на 10 мин быстрее первого. Найдите скорость первого автомобиля.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x-3|$ и $g(x) = \dfrac{1}{2}x + K$ при $K = 5$.
б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 27?

Вариант № 2

1. Решите неравенство

$$\frac{x^3-8}{2-x} - 2(5-x^2) + \frac{9-16x^2}{3+4x} - 5 \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$(3x^2 + 2y + 1)^2 + |xy + 2x + 4| = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$ в точке $x_0 = \dfrac{2 - \sqrt{21}}{4}$.

4. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов навстречу друг другу и встречаются через 1 ч 36 мин. Расстояние между городами 160 км. Известно, что 50 км второй проезжает на 25 мин быстрее первого. Найдите скорость второго автомобиля.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x + 2|$ и $g(x) = \dfrac{2}{3}x + K$ при $K = 5$.

   б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 5?

Вариант № 3

1. Решите неравенство

$$\frac{8x^3 + 27}{2x + 3} - \frac{25x^2 - 9}{3 - 5x} - 3(x^2 + 4) \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$(3x - 2y - 6)^2 + |xy - 4x + 4| = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 5x^2 + 4x - 1$ в точке $x_0 = \dfrac{-2 + \sqrt{29}}{5}$.

4. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов навстречу друг другу и встречаются через 1 ч 20 мин. Расстояние между городами 120 км. Известно, что 30 км второй проезжает на 9 мин быстрее первого. Найдите скорость первого автомобиля.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x-1|$ и $g(x) = -\frac{1}{2}x + K$ при $K = 5$.

   б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 75?

Вариант № 4

1. Решите неравенство

$$\frac{64x^3-1}{4x-1} + \frac{9x^2-16}{3x+4} - 15(x^2-1) \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$(3x-y+2)^2 + |2xy-3y+5| = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 3x^2+4x+5$ в точке $x_0 = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$.

4. Два автомобиля выезжают одновременно из двух городов навстречу друг другу и встречаются через 1 ч 15 мин. Расстояние между городами 200 км. Известно, что 80 км первый проезжает на 32 мин быстрее второго. Найдите скорость второго автомобиля.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x+1|$ и $g(x) = -\frac{2}{3}x + K$ при $K = 5$.

б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 80?

Вступительный экзамен в лицеи при МИФИ (8 класс)

Вариант № 1

1. Решите: а) неравенство $2x - 3(x-2) \geqslant 1\frac{1}{2}(4x-6)$;

   б) систему

$$\begin{cases} 2x - 3(x-2) \geqslant 1\dfrac{1}{2}(4x-6), \\ x + 20 - x^2 = 0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$4x^2 - 2x + 1 - 3(x^2 - 2) + 3\frac{1 - 9x^2}{1 + 3x} = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ в точке $x_0 = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{3}$.

4. Найдите двузначное натуральное число, если известно, что разность между самим числом и упятерённой суммой цифр равна 3, а при делении произведения цифр на их сумму в частном получается 3 и в остатке 11.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x - 3|$ и $g(x) = \frac{1}{2}x + K$ при $K = 5$.

   б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 27?

Вариант № 2

1. Решите: а) неравенство $2(x-4) \geqslant 5-3(x-1)$;
   б) систему

$$\begin{cases} 2(x-4) \geqslant 5-3(x-1), \\ 2x-x^2+8=0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$-(x^2+2x+4)-2(5-x^2)+\frac{9-16x^2}{3+4x}=0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 4x^2-6x+2$ в точке $x_0 = \dfrac{2-\sqrt{21}}{4}$.

4. Найдите двузначное натуральное число, если известно, что разность между самим числом и утроенной суммой цифр равна 7, а при делении произведения цифр на их сумму в частном получается 2 и в остатке 1.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x+2|$ и $g(x) = \dfrac{2}{3}x + K$ при $K = 5$.
   б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 5?

Вариант № 3

1. Решите: а) неравенство $4-3(x-2) \geqslant 2-(x-2)$;
   б) систему

$$\begin{cases} 4-3(x-2) \geqslant 2-(x-2), \\ 7x-x^2+8=0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$4x^2 - 6x + 9 - \frac{25x^2 - 9}{3 - 5x} - 3(x^2 + 54) = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 5x^2 + 4x - 1$ в точке $x_0 = \dfrac{-2 + \sqrt{29}}{5}$.

4. Найдите двузначное натуральное число, если известно, что разность между самим числом и учетверённой суммой цифр равна 6, а при делении произведения цифр на их сумму в частном получается 2 и в остатке 4.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x - 1|$ и $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + K$ при $K = 5$.

   б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 75?

Вариант № 4

1. Решите: а) неравенство $2(x - 3) \geqslant 1\dfrac{2}{3}(6x + 9)$;

   б) систему

$$\begin{cases} 2(x - 3) \geqslant 1\dfrac{2}{3}(6x + 9), \\ 14 - x^2 - 5x = 0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$16x^2 + 4x + 1 - \frac{9x^2 - 16}{3x + 4} - 15(x^2 - 1) = 0.$$

3. Найдите значение функции $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ в точке $x_0 = \dfrac{-2 - \sqrt{7}}{3}$.

4. Найдите двузначное натуральное число, если известно, что разность между самим числом и упятерённой суммой цифр равна 9, а при делении произведения цифр на их сумму в частном получается 2 и в остатке 2.

5. а) Постройте графики функций $f(x) = |x + 1|$ и $g(x) = -\frac{2}{3}x + K$ при $K = 5$.

   б) При каком значении параметра K площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, равна 80?

Содержание

ЗАДАНИЯ ОТРАСЛЕВОЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ “РОСАТОМ” ПО МАТЕМАТИКЕ. 2009 г.

Корректор Е.Е. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен Д.С. Теляковским

Подписано в печать 08.06.2009. Формат 60×84 $^1/_{16}$
Печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 4,5. Тираж 500 экз.
Изд. № 052-1. Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет
“МИФИ”, 115409, Москва, Каширское ш., д. 31.
Типография МИФИ