Заключительный тур Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом».
Математика. 9 класс

1. У Пети имелось три палочки: первая длины 5, вторая и третья – по 9. Из них он составил треугольник, причем ни один из его углов не равнялся 120^0. Чтобы образовать треугольник с углом 120^0, ему
пришлось одинаково укоротить первую и третью палочки, а вторую – укоротить на величину в два раза большую. На сколько укоротил Петя третью палочку?

2. При каких целых значениях a и b многочлен $16x^4 + ax^3 + 25x^2 - 6x + b$ является квадратом квадратного трехчлена? Найти этот квадратный трехчлен.

3. Сумма квадратов n первых членов арифметической прогрессии a_m равна $\dfrac{n(6n^2+3n-1)}{2}$ для любого натурального n. Найти a_{15} и разность прогрессии.

4. При каких значениях a все решения уравнения $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{(x-3)^3} = a$ - целые числа?

5. На продолжении стороны AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : AB = 2.$ Точка F расположена на стороне AC и делит эту сторону в отношении $AF : FC = 1:3$. Прямая FD пересекает сторону BC в точке E. Найти отношение длин отрезков $BE : EC$.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 2

$5-x,\ 9-2x,\ \ 9-x$ - измененные длины сторон, $0 < x < 5$

$$(9-x)^2 = (5-x)^2 + (9-2x)^2 + (5-x)(9-2x) \to 6x^2 - 47x + 70 = 0 \to$$

Наибольшая длина $9-x$: $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{35}{6} > 5 \end{array}\right.$

Задача 2 Ответ: 1) $a = -8,\ b = 9$ 2) $4x^2 - x + 3$

$16x^4 + ax^3 + 25x^2 - 6x + b = \left(4x^2 + Ax + B\right)^2 =$

$= 16x^4 + A^2x^2 + B^2 + 8Ax^3 + 8Bx^2 + 2ABx =$

$= 16x^4 + 8Ax^3 + (A^2 + 8B)x^2 + 2ABx + B^2$

$8A = a,\ \ A^2 + 8B = 25,\ 2AB = -6,\ B^2 = b$

$A^3 + 8AB = 25A \to A^3 - 25A - 24 = 0 \to \left[\begin{array}{l} A = -1 \\ A^2 - A - 24 = 0 \to \text{целых нет} \end{array}\right.$

$B = 3,\ a = -8,\ \ b = 9$

Задача 3 Ответ: 1) $a_{15} = 44,\ d = 3$ 2) $a_{15} = -44,\ d = -3$

$$S_n^2=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}\to S_{n+1}^2-S_n^2=\left(3n+2\right)^2=a_{n+1}^2\to a_{n+1}=\left[\begin{array}{l}3n+2\to d=3\\-3n-2\to d=-3\end{array}\right.$$

$$a_{15}=\left[\begin{array}{l}44\\-44\end{array}\right.$$

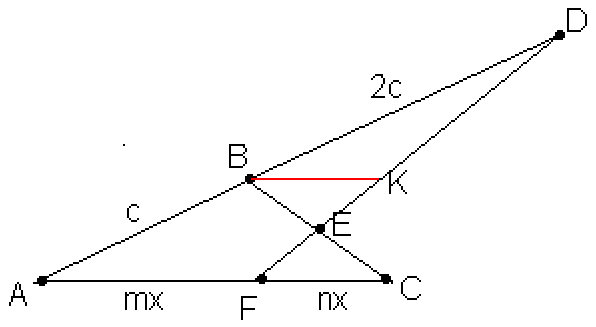
Задача 4 Ответ: $a=2n-3, n\in Z, n\geq 1$

$$a=|x|+x-3=\begin{cases}2x-3, & x\geq 0\\ -3, & x<0\end{cases}$$

При $a=-3$ все отрицательные x являются решениями,поэтому не все решения целые числа. Целое решение $x=n, n\in Z$ возникает, если $a=2n-3$ при $n>0.$ Оно единственное.

Задача 5 Ответ: 1) 1) $2:9,\quad$ 2) $2:3$

Решение. Случай 1. Расположение точки D указано на рис.

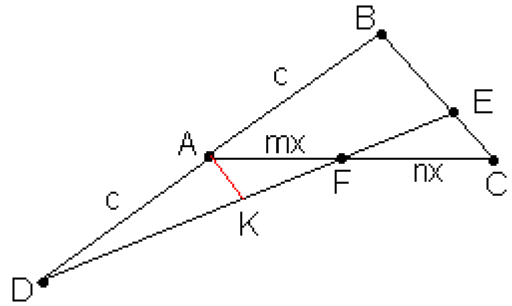


Прямая BK параллельна $AC\to\frac{BK}{mx}=\frac{2c}{3c}\to BK=\frac{2mx}{3}$

Из подобия $\triangle BKE$ и $\triangle CFE\to\frac{BK}{nx}=\frac{BE}{EC}\to\frac{BE}{EC}=\frac{2m}{3n}$

В задании $m=1, n=3\to BE:EC=2:9$

Случай 2. Расположение точки D указано на рис.



Прямая AK параллельна BC, из подобия $\triangle DAK$ и $\triangle DBE\to AK=\frac{BE}{2}$

Из подобия $\triangle AFK$ и $\triangle CFE\to\frac{AK}{EC}=\frac{m}{n}\to BE:EC=2m:n$

$BE:EC=2:3$