

**Заключительный тур Отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом».
Математика. 8 класс**

1. Возраст Пети, исчисляемый целым числом лет, в конце 2013 года равнялся сумме числа десятков и единиц в написании года его рождения. В каком году родился Петя?
2. Найти наибольшее двузначное, целое, положительное число, частное от деления которого на разность его цифр равно 21.
3. Если из некоторого числа вычесть 27, затем приписать первой цифрой 2, а последней - 9, то получится квадрат исходного числа. Найти это число.
4. Какое из чисел больше $\sqrt{2012} + \sqrt{2014}$ или $2\sqrt{2013}$? Ответ обосновать.
5. В параллелограмме с длинами диагоналей 1 и 2 расположен ромб так, что на каждой стороне параллелограмма лежит одна из вершин ромба, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найти длину стороны ромба.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1997 или 2011

Год рождения запишем в виде: $1000x + 100y + 10z + u$.

По условию $2013 - 1000x - 100y - 10z - u = z + u$.

Случай 1. $x = 1 \rightarrow 2u = 1013 - 100y - 11z$

Оценка: $2u \leq 18, 11z \leq 99 \rightarrow 2u + 11z \leq 117 \rightarrow y = 9 \rightarrow$

$2u = 113 - 11z$. Если $z \leq 8$, то $113 - 11z \geq 25$ и это невозможно, т.е. $z = 9$.

$2u = 113 - 99 = 14 \rightarrow u = 7$ и год рождения 1997.

Случай 2. $x = 2 \rightarrow 2u = 13 - 100y - 11z \rightarrow 100y = 13 - 11z - 2u \rightarrow y = 0$

$2u + 11z = 13 \rightarrow u = 1, z = 1$ и год рождения 2011.

Задача 2 Ответ: 84

x – число десятков, y – число единиц.

Случай 1. $x > y \quad 10x + y = 21(x - y) \rightarrow 11x = 22y \rightarrow x = 2y$

$y_{\max} = 4$, наибольшее число 84

Случай 2. $x < y \quad 10x + y = 21(y - x) \rightarrow 31x = 20y \rightarrow \begin{cases} x = 20k \\ y = 31k \end{cases}, k > 0$

В цифрах последнее невозможно.

Задача 3 Ответ: 47

Исходное число не более чем двузначное: $a = 10x + y$.

$$2 \cdot 1000 + (x - 2) \cdot 100 + (y - 7) \cdot 10 + 9 = (10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2.$$

$$(100x^2 + 20(y - 5)x + y^2 - 10y + 25) - 25 - 1800 + 61 = 0 \rightarrow$$

$$(10x + y - 5)^2 = 1764 = 42^2 \rightarrow 10x + y - 5 = 42 \rightarrow a = 47$$

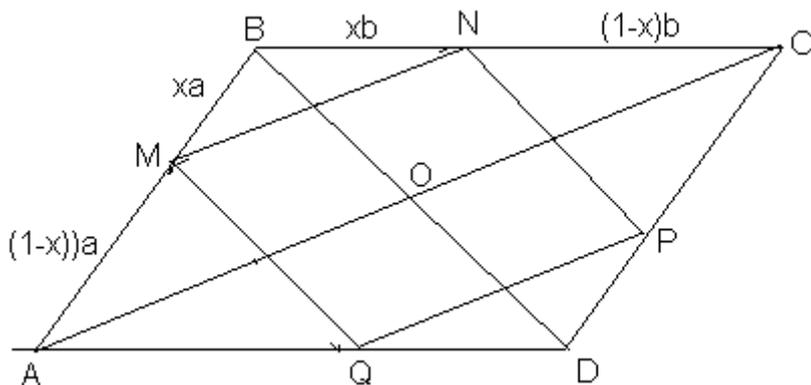
Задача 4 Ответ: второе больше.

$$\sqrt{2012} + \sqrt{2014} \vee 2\sqrt{2013} \rightarrow \sqrt{2014} - \sqrt{2013} \vee \sqrt{2013} - \sqrt{2012}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} \vee \frac{1}{\sqrt{2013} + \sqrt{2012}} \rightarrow \sqrt{2014} + \sqrt{2013} \wedge \sqrt{2013} + \sqrt{2012}$$

$\sqrt{2014} > \sqrt{2012}$, т.е. знак \wedge соответствует знаку $>$, а противоположный ему \vee - знаку $<$.

Задача 5 Ответ: $a = \frac{d \cdot D}{d + D} = \frac{2}{3}$



$AB = a, BC = b, x = BN : BC$

$$\frac{NP}{d} = 1 - x \rightarrow NP = (1 - x)d$$

$$\frac{MN}{D} = x \rightarrow MN = xD$$

$$NP = MN \rightarrow (1 - x)d = xD \rightarrow x = \frac{d}{d + D} \rightarrow MN = \frac{dD}{d + D}$$

В варианте $d = 1, D = 2$, поэтому $MN = \frac{2}{3}$.