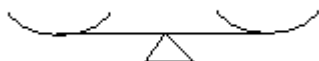


**Заключительный тур Отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом».
Математика. 7 класс**

1. На кофту нужно пришить 3 пуговицы одинакового цвета. Имеется мешочек с пуговицами одинаковыми по форме и различающимися только по цвету. Всего цветов 4. Какое наименьшее количество пуговиц нужно высыпать из мешочка, чтобы быть уверенным, что среди них найдутся 3 пуговицы одного цвета?
2. Найти наименьшее целое число $a \geq 1000$, которое при делении на 35 и на 45 имеют одинаковые остатки равные 1.
3. Саша и Даша придумали игру. В мешок сложили 2013 карточек, на которых написана двойка и 1340 карточек, на которых написан 0. Каждый из ребят, по очереди, берет из мешка вслепую две карточки, суммирует написанные на них числа, пишет результат на новую карточку и возвращает ее в мешок. Игра заканчивается, когда в мешке останется одна карточка. Какое число будет на ней написано? Кто ее обнаружит, если игру начинал Саша?
4. Сколько существует двузначных чисел, кратных трем и делящихся на сумму своих цифр? Найти наибольшее такое число.
5. У продавца имеется ограниченное число трехкилограммовых гирь и практически неограниченное число пятикилограммовых. Какое минимальное количество трехкилограммовых гирь должно быть у продавца, чтобы он мог взвесить на весах любой груз, содержащий целое число килограмм, если груз и гири могут располагаться на любых чашах весов?



Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 9

Существует набор из 8 пуговиц, в котором нет трех пуговиц одного цвета: каждого цвета по две. В любом наборе из 9 пуговиц найдется хотя бы одна тройка пуговиц одного цвета.

Если предположить противное, что одинаковых по цвету не более 2 пуговиц, то всего таких пуговиц не более 8 штук, что противоречит условию.

Ответ: 9 пуговиц.

Задача 2 Ответ: 1261

$$\begin{cases} a = 35n + 1 \\ a = 45m + 1 \end{cases} \rightarrow 35n = 45m \rightarrow 7n = 9m \rightarrow \begin{cases} n = 9t \\ m = 7t, \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow$$

$$a = 315t + 1 \geq 1000 \rightarrow t \geq 4 \rightarrow a_{\min} = 1261$$

Задача 3 Ответ: 1) 4026 2) Саша

При каждом шаге игры сумма чисел, написанных на карточках в мешке, не меняется.

В начале игры она составляла $2013 \times 2 = 4026$. Каждый шаг игры меняет четность числа карточек в мешке, поскольку уменьшает их число на единицу. Первоначально общее число карточек в мешке нечетно, поэтому Саша будет делать свой ход, когда число карточек в мешке нечетное, а Даша – когда четное. Последний ход происходит когда карточка в мешке одна, т.е. их число нечетно и обнаружит это Саша.

Задача 4 Ответ: 1) 17 2) 90

(12, 18, 21, 24, 27, 30, 36, 42, 45, 48, 54, 60, 63, 72, 81, 84, 90)

x, y – цифры искомого числа

$$a = 10x + y = 3k, \quad a = 10x + y = (x + y)m \rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{3k}{m}, & 2 \leq m \leq 10, \\ 10x + y = 3k, & 4 \leq k \leq 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{k}{3} \cdot \frac{m-1}{m} \\ y = \frac{k}{3} \cdot \frac{10-m}{m} \end{cases}$$

$$\text{Случай } m=2 \rightarrow \begin{cases} x = k/6 \\ y = 4k/3 \end{cases} \rightarrow k = 6t \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8t \end{cases} \rightarrow t = 1 \rightarrow a = 18$$

$$\text{Случай } m=3 \rightarrow \begin{cases} x = 2k/9 \\ y = 7k/9 \end{cases} \rightarrow k = 9t \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 7t \end{cases} \rightarrow a = 27$$

$$\text{Случай } m=4 \rightarrow \begin{cases} x = k/4 \\ y = k/2 \end{cases} \rightarrow k = 4t \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow a = 12, 24, 36, 48$$

$$\text{Случай } m=5 \rightarrow \begin{cases} x = 4k/15 \\ y = k/3 \end{cases} \rightarrow k = 15t \rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 5t \end{cases} \rightarrow a = 45$$

$$\text{Случай } m=6 \rightarrow \begin{cases} x = 5k/18 \\ y = 2k/9 \end{cases} \rightarrow k = 18t \rightarrow \begin{cases} x = 5t \\ y = 4t \end{cases} \rightarrow a = 54$$

$$\text{Случай } m=7 \rightarrow \begin{cases} x = 2k/7 \\ y = k/7 \end{cases} \rightarrow k = 7t \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \rightarrow a = 21, 42, 63, 84$$

$$\text{Случай } m=8 \rightarrow \begin{cases} x = 7k/24 \\ y = k/12 \end{cases} \rightarrow k = 24t \rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow a = 72$$

$$\text{Случай } m=9 \rightarrow \begin{cases} x = 8k/27 \\ y = k/27 \end{cases} \rightarrow k = 27t \rightarrow \begin{cases} x = 8t \\ y = t \end{cases} \rightarrow a = 81$$

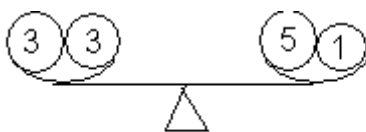
$$\text{Случай } m=10 \rightarrow \begin{cases} x = 3k/10 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow k = 10t \rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow a = 30, 60, 90$$

$a_{\max} = 90$, количество чисел 17

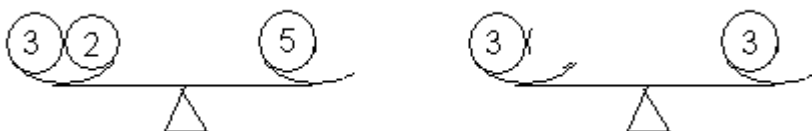
Задача 5 Ответ: 2 гири

Укажем минимальное количество гирь по 3 кг, для взвешивания грузов в 1, 2, 3 и 4 кг.

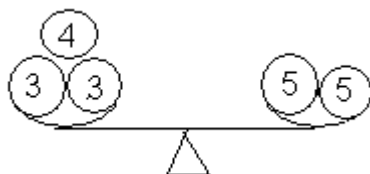
Груз в 1 кг. – нужно 2 гири по 3 кг



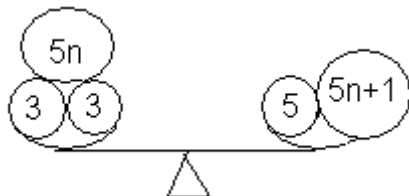
Груз в 2 кг или 3 кг– нужна 1 гиря в 3 кг



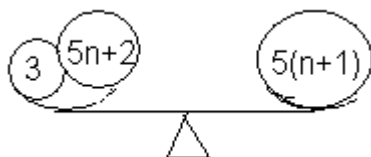
Груз в 4 кг – нужно 2 гири в 3 кг



Вес произвольного груза при делении на 5 имеет в остатке 0, 1, 2, 3 и 4. Если остаток 0, то груз можно взвесить с помощью только гирь в 5 кг. Если вес груза $5n+1$, то картина взвешивания получается из картинке взвешивания 1 кг:



Если вес груза $5n+2$ можно воспользоваться картинкой взвешивания груза в 2 кг:



Если вес груза $5n+3$ можно воспользоваться картинкой взвешивания груза в 3 кг:



Наконец, груз в $5n+4$ кг взвешивается подобно весу в 4 кг:

