Заключительный тур Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом».
Математика. 11 класс (Москва)

1. Найти числа x такие, что $\lg\left|\sin(x+|x|)\right|$, $\lg\left|\sin 3(x+|x|)\right|$ и $\lg\left|\sin 5(x+|x|)\right|$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

2. Найти наибольшее число $l>0$, для которого существует интервал длины l числовой оси, не содержащий решений уравнения $32\sin^6 x-48\sin^4 x+22\sin^2 x-3=0$.

3. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами $(x;y)$ - решениями системы $\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\dfrac{35}{13}\\ x+y=5\end{cases}$.

4. Папа, мама и Петя 2 часа сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама из каждой пятиминутки говорила первую, вторую и третью минуты, папа на каждом семиминутном интервале говорил четвертую и пятую минуты, а Петя на каждом временном интервале в девять минут говорил третью и четвертую минуты. Сколько минут за столом папа и мама говорили одновременно, а Петя молчал?

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}x-y=a\\ \sin x=\sin(x+2y)\end{cases}$ имеет единственное решение в квадрате $\begin{cases}-\pi\le x\le 0\\ -\pi\le y\le 0\end{cases}$?

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма $ABCD$. На сторонах AD и CD соответственно расположены точки E и F так, что $AE:ED=1:2$, а $DF:FC=1:3$. Шар находится в точке M пересечения прямых BF и CE. Известно, что шар, направленный в точку N борта BC, отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку M и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию. Найти величину отношения $BN:NC$, если известно, что траектория шара - выпуклый четырехугольник..

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: $x=\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{\pi k}{2},\ k\ge 0, k\in Z,\quad x=-\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{\pi k}{2},\ k\ge 1, k\in Z$

Решение

При $x\le 0$ решений нет.

При $x>0$:

$\lg|\sin 2x| + \lg|\sin 10x| = 2\lg|\sin 6x| \to |\sin 2x \cdot \sin 10x| = \sin^2 6x$

$$1^0. \begin{cases} \sin 2x \cdot \sin 10x > 0 \\ \sin 2x \cdot \sin 10x = \sin^2 6x \to \cos 8x - \cos 12x = 1 - \cos 12x \to x = \dfrac{\pi k}{4} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi k}{2} \to 6x = \frac{3\pi k}{2} \to 10x = \frac{5\pi k}{2}$$

При четных k такие x не принадлежат ОДЗ, при нечетных k – все члены прогрессии нулевые

$$2^0. \begin{cases} \sin 2x \cdot \sin 10x < 0 \\ -\sin 2x \cdot \sin 10x = \sin^2 6x \to 2\cos 12x - \cos 8x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$t = \cos 4x \to t\left(4t^2 - t - 3\right) = 0 \to \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -3/4 \end{array}\right.$$

2.1

$$\cos 4x = 0 \to 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \to 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ 6x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2},\ 10x = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi k}{2}\ k = 0,1,2...$$

При всех k члены прогрессии одинаковые и равны $\lg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому такие x не являются решениями.

2.2 $\cos 4x = 1 \to 4x = 2\pi m \to x = \dfrac{\pi m}{2}$ (серия недопустима: $\sin 2x = 0$)

$$2.3\ \cos 4x = -\frac{3}{4} \to \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{4} arc\cos(-3/4) + \dfrac{\pi}{2} n, \\ x_2 = -\dfrac{1}{4} arc\cos(-3/4) + \dfrac{\pi}{2} n, \end{array}\right.$$

Проверка условия $\sin 2x_1 \cdot \sin 10x_1 < 0$:

$$\sin 2x = (-1)^k \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right), \sin 10x = (-1)^k \sin\left(\frac{5}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) \to$$

$$\sin 2x \cdot \sin 10x = \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{5}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) - \cos 3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$$

Если $t = \cos\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right) = -\dfrac{3}{4}$, то

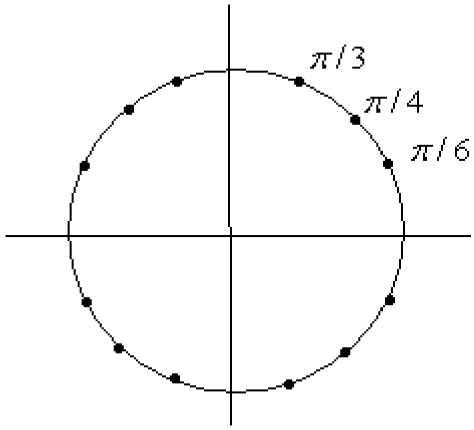
$$\sin 2x_1 \cdot \sin 10x_1 = -\frac{1}{2}(t-1)\left(4t^2 + 2t - 1\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{32} < 0$$

Задача 2 Ответ: $l = \dfrac{\pi}{3}$

Решение

Замена $t = \sin^2 x \geq 0$. Кубическое уравнение $32t^3 - 48t^2 + 22t - 3 = 0$

имеет решения $\left[\begin{array}{l} t = 1/2 \\ t = 3/4 \to \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{1}{2} \\ t = 1/4 \end{array}\right.$



$l = \dfrac{\pi}{3}$

Задача 3 Ответ: $x^2 + y^2 = 13$

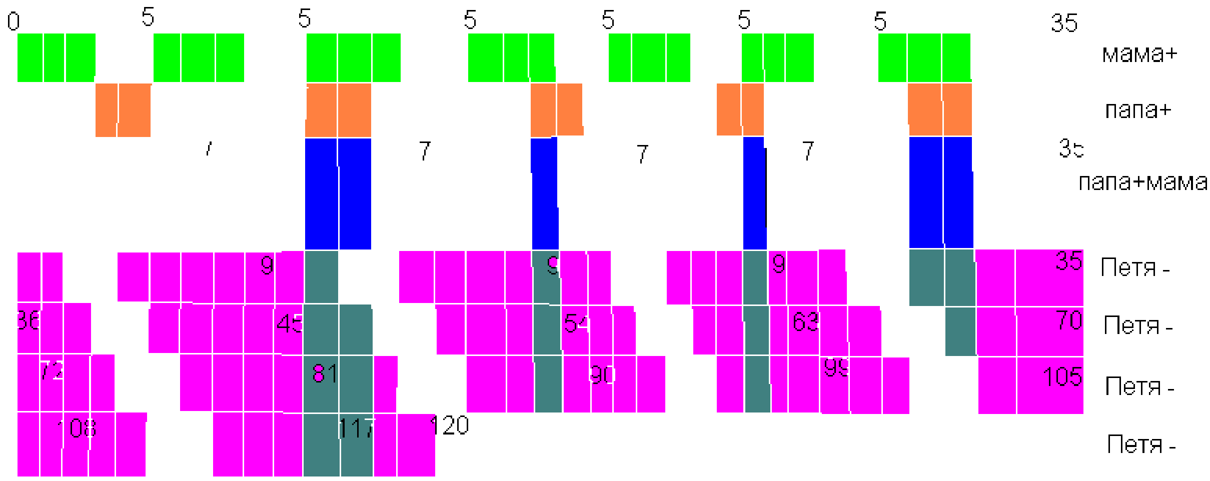
Решение

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2} = \dfrac{35}{13} \\ x + y = 5 \end{cases} \to \begin{cases} 13(x^2 - xy + y^2) = 7(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy \end{cases}$$

Обозначения: $\begin{cases} R^2 = x^2 + y^2 \\ u = xy \end{cases} \to \begin{cases} 13(R^2 - u) = 7R^2 \\ R^2 = 25 - 2u \end{cases} \to R^2 = 13$ Ответ: $x^2 + y^2 = 13$

Задача 4 Ответ: 16 минут

Решение.



Период разговоров мамы 5 минут (мама +, зеленый), период разговоров папы 7 минут (папа +, коричневый),

Период разговоров папы и мамы одновременно 35 минут (папа+мама, синий) ,

Период молчания Пети 9 минут (Петя -, малиновый)

Множество (папа+мама-Петя, темно зеленый) мама и папа говорят одновременно, а Петя молчит.

Всего за 120 минут 16 темнозеленых клеток.

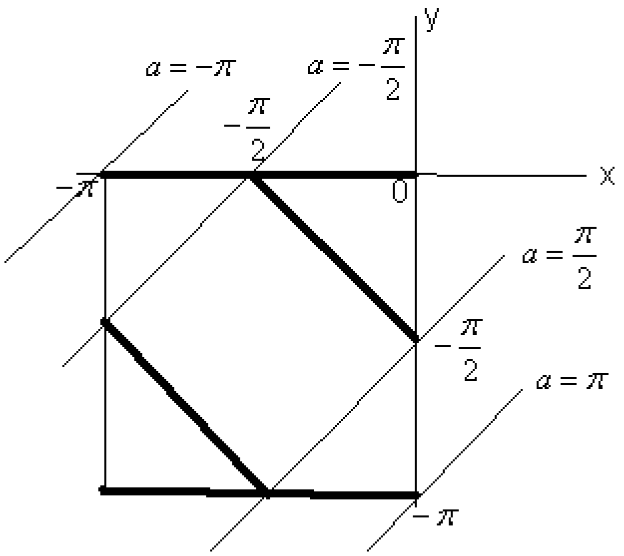
Задача 5 Ответ: $a \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Решение

Решение второго уравнения в системе:

$$\sin x = sin(x+2y) \rightarrow \left[\begin{array}{c} x = x + 2y + 2\pi k \\ x = \pi - x - 2y + 2\pi m \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{c} y = -\pi k \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{array}\right., \ k, m \in Z$$

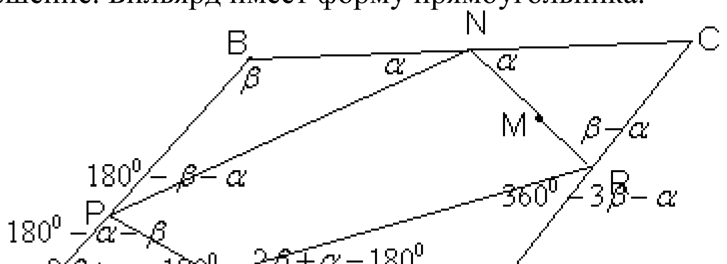
На рис. изображены жирной линией решения уравнения в квадрате:



Единственному решению системы соответствуют значения a, при которых прямая $y = x - a$ пересечет жирную линию ровно один раз. Это бывает при $a \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

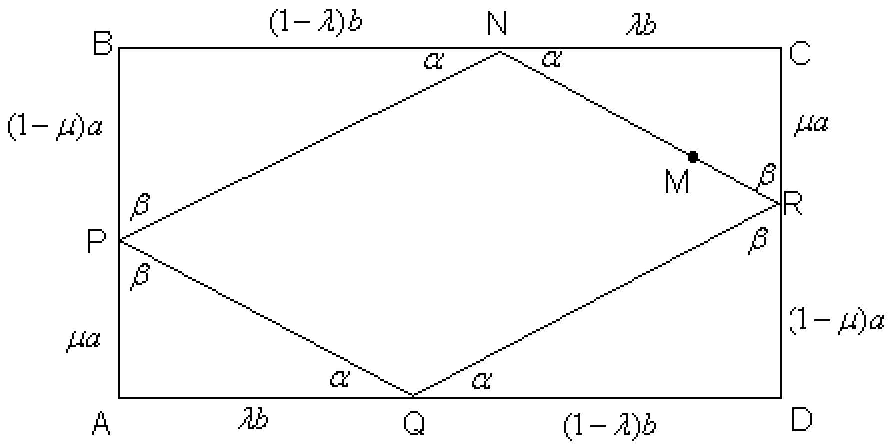
Задача 6 Ответ: 1) $BN : NC = \frac{(m+n)p}{(2n+m)q} = 1:5, \quad m = 1, n = 2, p = 1, q = 3$

Решение. Бильярд имеет форму прямоугольника.



На рис. изображен четырехугольник $MPQR$ - путь шара. Приравнивая углы падения и отражения, получим: $360^0 - 3\beta - \alpha = \beta - \alpha \rightarrow \beta = 90^0$. т.е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, а четырехугольник $MPQR$ - параллелограммом.

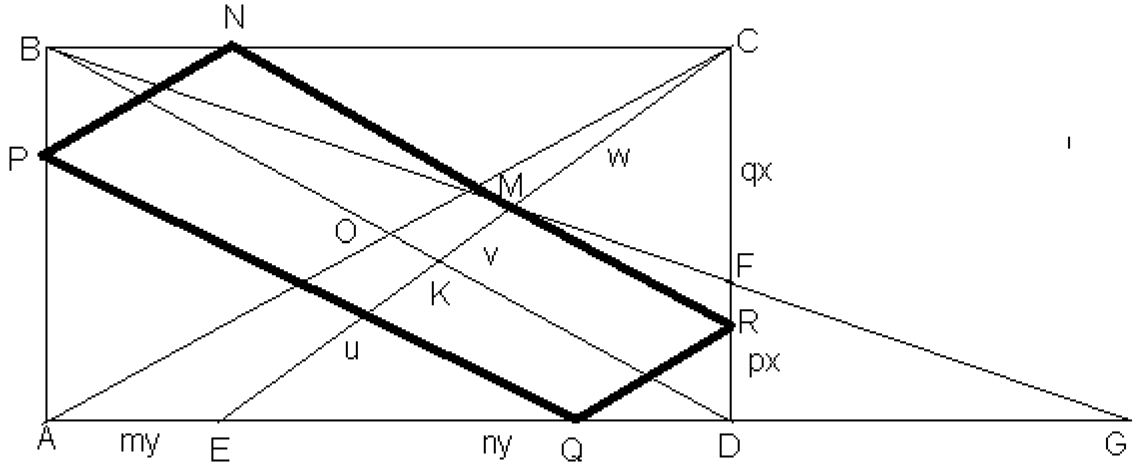
2. Направлять шар следует направлять параллельно диагонали BD прямоугольника.



$$tg\alpha=\frac{(1-\mu)a}{(1-\lambda)b}=\frac{\mu a}{\lambda b}\to\lambda=\mu\to tg\alpha=\frac{a}{b}$$

Отсюда следует параллельность прямой MN диагонали BD.

3. Вычисление отношения $BN:NC$.



3.1. Вычисление отношения $CM:MK$.

Треугольники BCF и GFD подобны: $DG=\frac{p}{q}b$, $ED=\frac{n}{m+n}b$,

$$\frac{u+v}{w}=\frac{\frac{n}{n+m}b+\frac{p}{q}b}{b}=\frac{nq+(m+n)p}{q(m+n)}$$

Треугольники BCK и DKE подобны: $\frac{u}{v+w}=\frac{ED}{b}=\frac{n}{m+n}$

Обозначение: $t=\frac{w}{v}=\frac{CM}{MK}$

$$\frac{u/v}{1+t}=\frac{n}{m+n},\ \frac{u/v+1}{t}=\frac{nq+(m+n)p}{q(m+n)}\to\frac{n}{m+n}(1+t)+1=\frac{nq+(m+n)p}{q(m+n)}t\to t=\frac{(2n+m)q}{(m+n)p}.$$

3.2. Путь шара, отправленного из точки M параллельно диагонали BD, является параллелограммом $NKLP$ и является искомым.

$$BN:NC=\frac{v}{w}=\frac{1}{t}=\frac{(n+m)p}{(m+2n)q}.$$