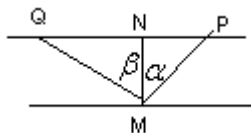


**Заключительный тур Отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом».
Математика. 10 класс**

1. Числа a, b, c таковы, что они сами, а также числа $a-2, b-6, c-12$ являются последовательными членами двух геометрических прогрессий, а числа $a-10, b+5, c-7$ могут составить три последовательных члена арифметической прогрессии. Найти числа a, b, c .
2. Найти минимальное значение выражения $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y$, если $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$. При каких значениях $(x; y)$ оно достигается?
3. A – трехзначное, целое, положительное число, B – число, полученное из числа A путем зачеркивания его последней цифры, C – число, полученное из числа A – зачеркиванием первой цифры. Известно, сумма цифр числа A равна 15, а $|B - C| = 11$. Найти число A .
4. Найти формулу для вычисления суммы n членов последовательности $1, 8 + 2, 89 + 3, 899 + 4, 8999 + \dots$
5. Отрезок MN перпендикулярен границам бумажной полосы (см. рис.). Прямые MP и MQ образуют с ним углы 60° и 45° соответственно. Полосу перегнули по отрезку MN так, что две ее половинки составили двугранный угол в 60° . Найти угол между отрезками MP и MQ в пространстве после перегиба.



Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1) $a = 3, b = 12, c = 48$ 2) $a = 363, b = 462, c = 588$

$$\text{Система условий: } \begin{cases} b^2 = ac \\ a + c = 2b + 27 \\ (a-2)(c-12) = (b-6)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2b + 27 \\ 6a + c = 6(b-1) \end{cases}$$

$$a = \frac{4b-33}{5}; \quad c = \frac{6b+168}{5} \rightarrow (4b-33)(6b+168) = 25b^2 \rightarrow b^2 - 474b + 5544 = 0$$

$$\begin{cases} b = 12 \rightarrow a = 3, c = 48 \\ b = 462 \rightarrow a = 363, c = 588 \end{cases}$$

Задача 2 Ответ: 1) $a_{\min} = 2$ 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m, k \in Z$

$$B = -2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} = -2 + \frac{1}{\sin^2 x \sin^2 y}$$

$$u = \sin^2 x, v = \sin^2 y, u + v = 1, B = -2 + \frac{1}{u(1-u)}$$

Минимальное значение $u(1-u)$ достигается при $u = v = \frac{1}{2}$ и равно 2.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad \sin^2 y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, \quad m, k \in Z$$

Задача 3 Ответ: $A=654, A=456$

$$A = 100x + 10y + z, \quad B = 10x + y, \quad C = 10y + z$$

Случай 1. $B \geq C$

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 10x - 9y - z = 11 \end{cases} \rightarrow 11x - 8y = 26 \rightarrow x = 2k \rightarrow 11k - 4y = 13 \rightarrow \begin{cases} k = 3 + 4t \\ y = 5 + 11t \end{cases}$$

С учетом цифр $t = 0 \rightarrow x = 6, y = 5, z = 4 \rightarrow A = 654$.

Случай 2. $B < C$

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 10x - 9y - z = -11 \end{cases} \rightarrow 11x - 8y = 4 \rightarrow x = 4k \rightarrow 11k - 2y = 1 \rightarrow \begin{cases} k = 1 + 2t \\ y = 5 + 11t \end{cases}$$

С учетом цифр $t = 0 \rightarrow x = 4, y = 5, z = 6 \rightarrow A = 456$.

Задача 4 Ответ: $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 0,9n - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$

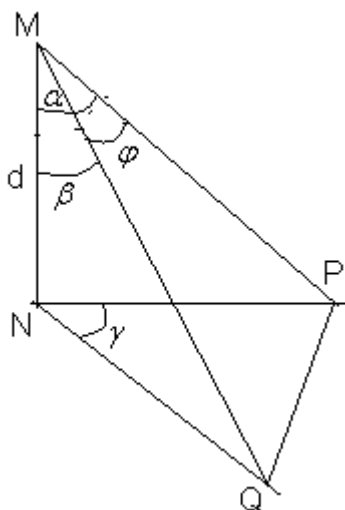
$$S_n = (1,9 - 0,1) + (2,9 - 0,01) + (3,9 - 0,001) + \dots =$$

$$= 1 + 2 + \dots + n + 0,9n - (0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 0,9n + \frac{0,1(1 - (0,1)^n)}{1 - 0,1} = \frac{n(n+1)}{2} + 0,9n - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

Задача 5 Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{8}(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$

Решение.



$\angle MNP = \alpha$, $\angle PNQ = \beta$, $\angle PNQ = \gamma$ -

$\angle PNQ = \varphi$ - искомый

Обозначение: $MN = d$

$PN = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $QN = d \cdot \operatorname{tg} \beta$, $PM = d / \cos \alpha$, $QM = d / \cos \beta$

Т. косинусов для $\triangle PNQ$:

Т. косинусов для $\triangle PNQ$:

$$PQ^2 = d^2 (tg^2 \alpha + tg^2 \beta - 2tg \alpha \cdot tg \beta \cdot \cos \gamma)$$

Т. косинусов для $\triangle PMQ$:

$$PQ^2 = d^2 \left(1/\cos^2 \alpha + 1/\cos^2 \beta - \frac{2}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \cos \varphi \right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{2}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \cos \varphi = tg^2 \alpha + tg^2 \beta - \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \cos \gamma \rightarrow$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos \gamma = \cos \varphi$$

$$\text{В задании: } \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ \rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{8} (2\sqrt{2} + \sqrt{6})$$