Когомологии конечных групп без гомологической алгебры.

Мостовский Николай
Класс:11

ГБОУ СОШ №564, ЛНМО г. Санкт-Петербург
Научный руководитель: Иванов Сергей Олегович, постдок Лаборатории им. П.Л.Чебышева

Теории гомологий и когомологий математических объектов на данный момент являются неотъемлемой частью современной математики. На данном этапе развития в тех случаях, когда появляется новый интересный алгебраический, топологический, или геометрический объект, одним из первых вопросов о нем является вопрос о различных его гомологических инвариантах. Для их исследования и вычисления обычно используются методы гомологической алгебры: резольвенты, спектральные последовательности и т.п. В большинстве ситуаций теории (ко)гомологий с малыми индексами описываются естественным образом без какой-либо гомологической алгебры. В этом и заключается ценность теорий (ко)гомологий: они дают единый взгляд на различные структуры и инварианты исходного объекта, которые естественны, но на первый взгляд не кажутся связанными. В некоторых ситуациях удается выразить теорию (ко)гомологий, не используя гомологической алгебры, и для высших индексов. Это является ценным результатом, так как позволяет работать с данными теориями когомологий более элементарными методами. Ярким примером такого результата является теорема Д.Квиллена [1], доказанная в 1989 году. В ней он выразил четные циклические гомологии алгебры в виде пределов по категории копредставлений от некоторых элементарных функторов.

В нашей работе мы доказываем явные формулы, не использующие гомологической алгебры, для когомологий и гомологий конечной группы с коэффициентами в произвольном модуле.

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная группа, Z G – групповое кольцо, N – сумма всех элементов группы в групповом кольце и M -- Z G-модуль. Тогда имеют место следующие изоморфизмы

$$H^n(G,M) \cong \frac{\Big(\Delta(G)^{\otimes n} \otimes M\Big)^G}{\mathcal{N} \cdot \Big(\Delta(G)^{\otimes n} \otimes M\Big)},$$

$$H_n(G,M) \cong \frac{\Big((\mathbb{Z}G/\mathcal{N})^{\otimes n+1} \otimes M\Big)^G}{\mathcal{N} \cdot \Big((\mathbb{Z}G/\mathcal{N})^{\otimes n+1} \otimes M\Big)},$$

где n>0, D(G) – аугментационный идеал, тензорное произведение берется над Z и рассматривается с диагональным действием группы G , а $(\dots)^G$ обозначает инварианты действия G.

Для доказательства этой теоремы использовалась теория когомологий конечной группы в объёме учебника К.С.Брауна [2].

[1] D. Quillen, “Cyclic cohomology and algebra extension”, K-Theory, 3, 205-246, 1989.

[2] К.С.Браун, “Когомологии групп”, Наука, 1987.