Альтернативные доказательства 100 неравенств: метод отделяющих касательных

Лепес Адилсултан

11 класс

г. Алма-ата, Республиканская специализированная физико-математическая средняя школа-интернат

Научный руководитель: И.Ж.Ибатулин

Сегодня существует множество методов доказательства неравенств, некоторым из них посвящены десятки книг, некоторым сотни статей. Но несмотря на обилие методов и методик обучения практика проведения олимпиад показывает, что доказать неравенство обычно могут не более половины участников. Причем такая картина наблюдается на различных международных олимпиадах. Так, например, на международной математической олимпиаде в Аргентине в 2012 году из 548 участников задачу № 2 решило только 189. В связи с этим резонно поставить вопрос: почему такой низкий процент участников на олимпиадах могут доказать соответствующее неравенство? Частично ответом на указанный вопрос может служить тот факт, что при доказательстве неравенств классическими методами отсутствует аналитическая составляющая и необходимо изобретать некоторые нестандартные преобразования, которые не имеют полной классификации. Большинству участников не помогает даже то, что для классических неравенств, таких как неравенство Коши, неравенство Коши-Буняковского (Коши-Шварца), транснеравенство, неравенство Чебышева, неравенство Мюрхеда, неравенство Караматы, неравенство Гельдера, неравенство Йенсена, неравенство Шура, в современной литературе можно найти множество специальных подборок задач из различных олимпиад, показывающих различные применения этих неравенств (см., например, [1], стр. 9-132, [2], стр.15-96). Также существуют специальные методики, которые должны помогать учащимся догадаться до необходимой комбинации классических неравенств. Например, есть, так называемый, метод баланса коэффициентов, который используется для применения неравенства Коши, неравенства Коши-Шварца, неравенства Гельдера (подробнее об этом методе см. [2], стр. 97-106). Но несмотря на все это, факты не в пользу указанных методик. В связи с этим, естественно, возникает вопрос: возможно ли подойти к доказательству неравенств с несколькими переменными с другой точки зрения?

На основе исследований, представленных в настоящем проекте нами был создан новый метод доказательства неравенств: метод отделяющих касательных. Указанное название впервые было предложено 28 мая 2013 года после совместного доклада И.Ж. Ибатулина и А.Н.Лепеса «Об одном методе доказательства неравенств» на XXI Международной конференции “Математика. Образование” в городе Чебоксары.

Описание и практическое применение метода отделяющих касательных принято в печать в четыре журнала, в том числе в российский журнал «Математика в школе», болгарский журнал «Didactical Modeling» и Гонконгский журнал «Mathematical Excalibur». Общий объем этих статей составляет 48 страниц, при этом предложено альтернативное доказательство 34 неравенств.

На основе анализа 731 доказательств неравенств из двух книг можно констатировать следующее

> в книге [2] из 246 неравенств подходящего типа являются 48, из которых с помощью наших рекомендаций можно доказать 31 неравенство;
>
> в книге [1] из 485 неравенств, походящего типа являются 101, из которых с помощью наших рекомендаций можно доказать 74 неравенства.

Также нами проведено исследование класса функций, для которых справедливо неравенство Йенсена. Показано, что основным условием для выполнения неравенства Йенсена в некоторой заданной точке x_0 как для выпуклых функций, так и для невыпуклых, является расположение графика функции по одну сторону от соответствующей локальной опорной кривой, проведенной в точке x_0 (теоремы 1-4). Тем самым, среди олимпиадных неравенств найдено несколько десятков невыпуклых функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена, и в каждой из книг [1] и [3] было выявлено одно неверное доказательство неравенства. Данные ошибки носят принципиальный характер и не могут быть устранены исправлением соответствующих коэффициентов. Интересно отметить, что даже среди многочленов третьей степени существует бесконечно много невыпуклых функций, удовлетворяющих неравенству Йенсена (теорема 5).

15 декабря 2013 года настоящий проект был удостоен гран-при в учебно-исследовательской номинации на Московской математической конференции школьников, организованной Московским центром непрерывного математического образования.

Список литературы

1. *Chetkovski Z. Inequalities. Theorems, techniques and Problems.* – Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
2. *Pham Kim Hung* Secrets in Inequalities (volume 1). – Zalău : Gill. 2007.
3. *Suppa E.* Inequalities from around the world 1995-2005. Teramo, 2011. 157 p.