Олимпиадное задание заключительного тура конкурса Юниор-2014
для школьников 9 класса

1. Имеется пять карандашей. Каждый из них можно разломать на семь или девять частей (или не делать этого) и заточить их. Возможно ли, чтобы каждому из 41 ученика досталось по одному, хоть и маленькому, карандашику, при этом не осталось ни одного лишнего?

2. Найти ординаты y точек на прямой $x+2y=3$, абсциссы x которых удовлетворяют уравнению $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$.

3. Второй и пятый члены возрастающей геометрической прогрессии являются решениями уравнения $9x^2-27x+8=0$. Найти знаменатель прогрессии.

4. В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре биссектрисы внутренних углов. Точки их попарного пересечения обозначим через $M, N, P \quad Q$. Найти отношение площадей четырехугольников $MNPQ$ и $ABCD$, если длины сторон параллелограмма равны 5 и 3.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: возможно одним способом: 2 карандаша разделить на 7 частей и 3 карандаша – на 9 частей

Решение

k - число карандашей разделенных на 7 частей, m - число карандашей разделенных на 9 частей, n - число не делимых карандашей.

$$\begin{cases} 7k++9m+n=41 \\ k+m+n=5 \end{cases} \to 6k+8m=36 \to 3k+4m=18 \to \begin{cases} k=2-4t \\ m=3+3t \end{cases}, t\in Z$$

$$2-4t\ge 0 \to t\le \frac{1}{2},\ 3+3t\ge 0 \to t\ge -1 \to \left[\begin{array}{l} t=-1 \to k=6>5 \text{ посторонний} \\ t=0 \to k=2, m=3, n=0 \end{array}\right.$$

Задача 2 Ответ: $y_1=1$ (для $x=1$), $y_2=4,5$ (для $x=-6$)

Решение варианта 1.

Замена: $t=x^2+5x \to t(t+6)=72 \to \left[\begin{array}{l} t_1=6 \\ t_2=-12 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x-6=0 \to \left[\begin{array}{l} x_1=1 \to y_1=1 \\ x_2=-6 \to y_2=4,5 \end{array}\right. \\ x^2+5x+12=0 \to x\in\varnothing \end{array}\right.$$

Задача 3 Ответ: $q = 2$

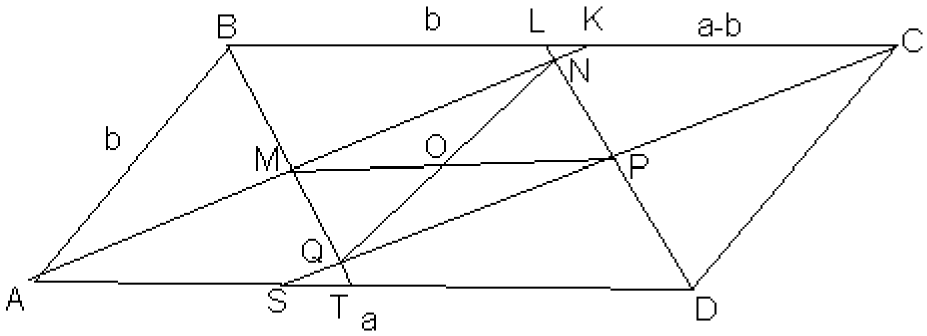
Решение. $b_2 + b_5 = b_2(1+q^3) = 3, \quad b_2 \cdot b_5 = b_2^{\,2} \cdot q^3 = \frac{8}{9} \to$

$$\frac{(1+q^3)^2}{q^3} = \frac{81}{8} \to t = q^3 \to 8t^2 + 16t + 8 = 81t \to 8t^2 - 65t + 8 = 0 \to$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = 1/8 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ t = 1/2 \end{array}\right. \to q = 2 \text{ (возрастающая)}$$

Задача 4 Ответ: $S_{MNPQ} : S_{ABCD} = \frac{(a-b)^2}{2ab} = 2:15$

Решение



$\triangle ABK$ - равнобедренный, $AB = BK = b$, $KC = a - b$
Точка M - середина отрезка AK, аналогично, P - середина отрезка LD, поэтому MP лежит на средней линии параллелограмма и $MKCP$ - параллелограмм и $MP = a - b$.
$MNPQ$ - прямоугольник $NQ = MP = a - b$. Площадь

$$S_{MNPQ} = 0,5(a-b)^2 \sin\measuredangle A, S_{ABCD} = ab\sin\measuredangle A \to S_{MNPQ} : S_{ABCD} = \frac{(a-b)^2}{2ab}.$$

В задании $a = 5,\ b = 3 \to S_{MNPQ} : S_{ABCD} = 2:15$