**Олимпиадное задание заключительного тура конкурса Юниор-2014**

**для школьников 11 класса**

1. Дед Мороз оставил под елкой в семье Ивановых конфеты, которые предполагалось разделить поровну между детьми. Первый проснувшийся ребенок нашел конфеты, посчитал их и съел свою долю. Так поступили и все другие дети: каждый думал, что он проснулся первым и съедал свою долю. Когда последний ребенок забрал свои конфеты, под елкой оставалось 8 конфет. Сколько конфет было под елкой и сколько детей в семье Ивановых?

2. Пары точек $A$ и $B$ числовой оси с координатами $x$ и $y$ соответственно, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sin x\cdot\cos x-4\sin y\cdot\cos y=-1 \\ \sin^2 x=4\sin^2 y \end{cases}.$$

Найти наименьшее возможное при этом условиях расстояние между точками $A$ и $B$.

3. При каких значениях $a$ система уравнений $\begin{cases} \left|ax+y^2\right|=y \\ x+\left|y\right|=5 \end{cases}$ имеет единственное решение?

4. Все углы при вершине $D$ пирамиды $ABCD$ прямые, площади боковых граней $DAB, DBC, DAC$ равны $1, 2, 3$ соответственно. Найти площадь основания $ABC$.

## Ответы и решения

**Задача 1** Ответ: 1) число детей 2, количество конфет 32

2) число детей 3, количество конфет 27

**Решение:** Пусть $n$ - число детей в семье, $A$ - число оставшихся конфет после последнего ребенка, $B$ - число конфет, оставленных под елкой.

$\frac{B}{n}$ – число конфет, взятых первым ребенком,

$\frac{(n-1)B}{n}$ – число конфет, остающихся под елкой после первого ребенка,

$\frac{(n-1)B}{n^2}$ – число конфет, взятых вторым ребенком,

$\frac{\left(n-1\right)^2 B}{n^2}$ – число конфет, остающихся под елкой после второго ребенка,

$\frac{\left(n-1\right)^n B}{n^n}$ – число конфет, оставленных последним ребенком.

По условию, $\frac{\left(n-1\right)^n B}{n^n}=A\to B=\frac{A}{\left(n-1\right)^n}\cdot n^n$. Числа $n$ и $n-1$ взаимно простые, поэтому

целочисленность $B$ возможна, если все делители числа $(n-1)^n$ содержатся среди делителей числа

$A$. В условиях задачи число $A = 8 \ (n-1)^n$ при $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$. Тогда $B_1 = 8 \cdot 2^2 = 32$ при $n = 2$ и $B_2 = \dfrac{8}{2^3} \cdot 3^3 = 27$

Задача 2. Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$

Решение.

В общем виде: $\begin{cases} d\sin 2y - b\sin 2x\cos x = 2(a-c) \\ b\sin^2 x = d\sin^2 y \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} d\sin 2y - b\sin 2x\cos x = 2(a-c) \\ d\cos 2y - b\cos 2x = d - b \end{cases} \rightarrow$

Возводим обе части уравнений в квадрат и складываем:

$(b-d)^2 + 4(c-a)^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos 2(x-y) \rightarrow$

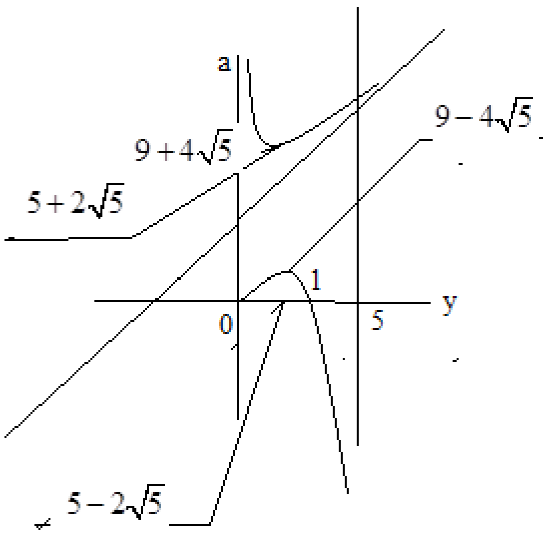
$\cos 2(x-y) = 1 - \dfrac{2(c-a)^2}{bd} \leftrightarrow \sin^2(x-y) = \dfrac{(c-d)^2}{bd}$

В вар. 1 $a = 2, b = 1, c = 1, d = 4 \rightarrow \quad \sin|x-y| = \dfrac{1}{2}, \qquad |x-y||_{\min} = \dfrac{\pi}{6}$

Задача 3. Ответ: $a = 9 \pm 4\sqrt{5}$

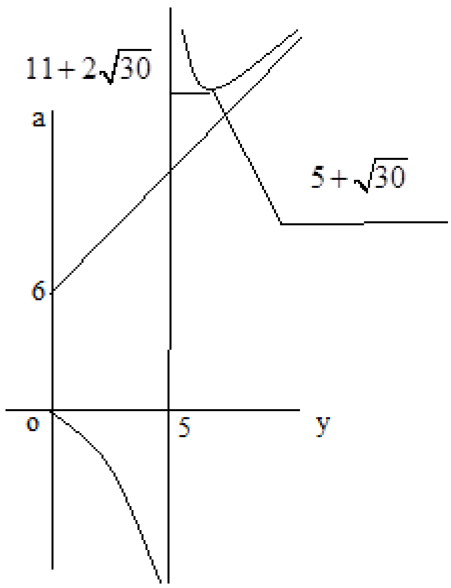
Решение.

А. $\begin{cases} ax + y^2 = y \\ x + y = 5 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(5-y) = y - y^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow a = \dfrac{y^2 - y}{y-5} = y + 4 + \dfrac{20}{y-5}$



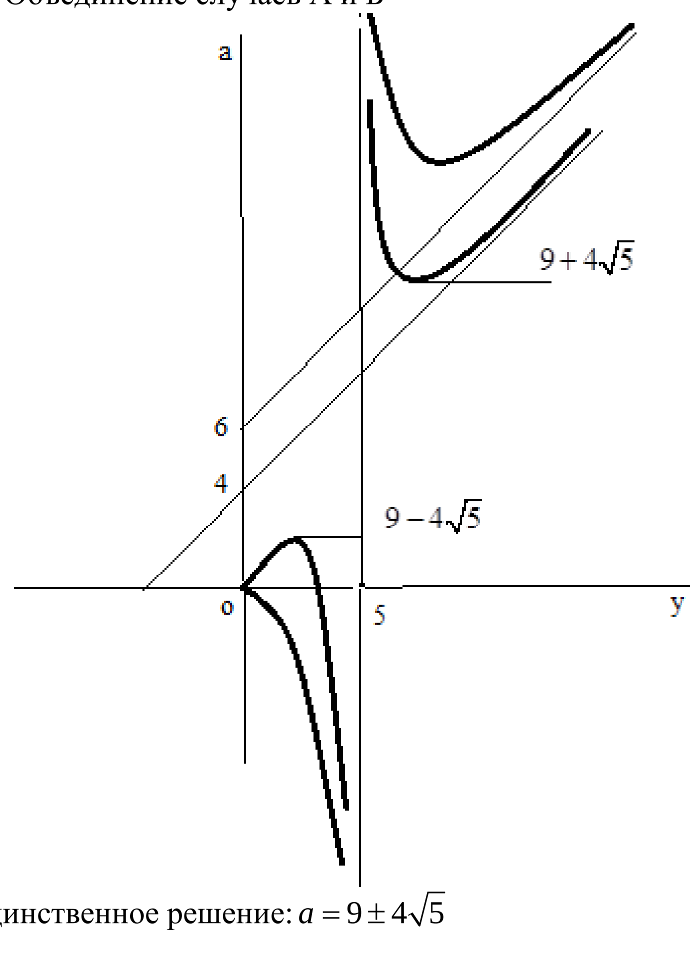

Единственное решение в случае А при $a = 9 \pm 4\sqrt{5}$ и $a \in (-\infty; 0)$

Б. $\begin{cases} ax + y^2 = -y \\ x + y = 5 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(5-y) = -y - y^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow a = \dfrac{y^2 + y}{y-5} = y + 6 + \dfrac{30}{y-5}$




Единственное решение в случае Б: $a = 11+\sqrt{30}$ и $a \in (-\infty; 0]$

С. Объединение случаев А и Б

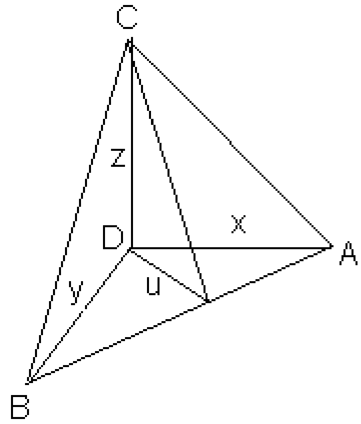



Единственное решение: $a = 9 \pm 4\sqrt{5}$

Задача 4. Ответ: $S_{ABC} = \sqrt{14}$

Решение: Пусть площади граней равны $p_1, p_2, p_3$. Обозначим длины ребер $DA, DB, DC$ через $x, y, z$. Тогда

$$\begin{cases} xy = 2p_1, \\ xz = 2p_2 \\ yz = 2p_3 \end{cases} \to \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{2p_1p_2}{p_3}} \\ y = \sqrt{\dfrac{2p_1p_3}{p_2}} \\ z = \sqrt{\dfrac{2p_2p_3}{p_1}} \end{cases}$$




Обозначим через $u$ длину высоты треугольника $DAB$, проведенную из вершины $D$:

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot u = 2p_1 \to u = \frac{2p_1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Угол наклона грани $ABC$ к грани $DAB$ обозначим через $\varphi$.

$$tg\varphi = \frac{z}{u} = \frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{2p_1} \to \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{4p_1^2 + z^2\left(x^2+y^2\right)}}{2p_1}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{4p_1^2 + z^2\left(x^2+y^2\right)}}{2}$$

Исключим зависимость площади от $x, y, z$:

$$x^2 + y^2 = \frac{2p_1p_2}{p_3} + \frac{2p_1p_3}{p_2} \to z^2\left(x^2+y^2\right) = 4\left(p_2^2 + p_3^2\right)$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$