Олимпиадное задание заключительного тура конкурса Юниор-2014

для школьников 10 класса

1. В семье одна десятилетняя дочка и несколько мальчиков, старшему из которых 13 лет. Возраст девочки в этом году и в следующем составляет 20% от суммы возрастов всех детей в семье. Известно, что мальчики рождались регулярно, через равное число лет. Сколько мальчиков в семье и сколько им лет?

2. Найти число y, для которого сумма квадратов его отклонений от решений уравнения $\left(6x^2-3x-5\right)^2=2x^2\left(10x^2-3x-5\right)$ минимальная.

3. Доказать, что выражение $4^{2n+1}+165n-229$ делится без остатка на 225 при любых целых, положительных n.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены соответственно точки M и N так, что прямая MN пересекает продолжение стороны BC в точке D. В каком отношении точки M и N должны делить стороны треугольника, если отношение площадей треугольников AMN, NCD и четырехугольника $MBCN$ относятся как 1:1:1?

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 1) 4 мальчика ; 2) 7,9,11, 13 лет

Решение.

Пусть

$x_k -$ возраст $k-$ого мальчика в этом году (в порядке возрастания),

n число мальчиков,

$$10=\frac{1}{5}\left(10+x_1+x_2+...+x_n\right)\to x_1+x_2+...+x_n=40$$

$$11=\frac{1}{5}\left(11+x_1+x_2+...+x_n+n\right)\to 44=40+n\to n=4$$

$x_1, x_2, x_3, 13$ члены арифметической прогрессии $\to x_1+13=20\to$

$x_1=7.\ x_4=7+3d\to d=2.\ x_2=9,\ x_3=11$

Задача 2 Ответ: $y=\frac{15}{32}$ (решения $\pm1; \frac{5}{2}; -\frac{5}{8}$)

Решение

$$\left(6x^2-3x-5\right)^2=2x^2\left(6x^2-3x-5+4x^2\right)$$

Замена $\begin{cases} u=6x^2-3x-5 \\ v=x^2 \end{cases}\to u^2-2uv-8v^2=0\to\left[\begin{array}{l} u=4v \\ u=-2v \end{array}\right.$

1 вариант. $6x^2-3x-5=4x^2\to 2x^2-3x-5=0\to\left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=\frac{5}{2} \end{array}\right.$

2 вариант. $6x^2-3x-5=-2x^2\to 8x^2-3x-5=0\to\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-\frac{5}{8} \end{array}\right.$

$$U^2=\sum_{i=1}^{4}\left(y-x_i\right)^2=4y^2-2(x_1+x_2+x_3+x_4)y+\sum_{i=2}^{4}x_i^2$$

$$y=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)=\frac{15}{32}$$

Задача 3 Доказательство

Проверим утверждение для $n=1$

$64+165-229=0$ делится на 225.

Предположим, что утверждение верно при $n=k$ и докажем, что оно остается верным при $n=k+1$

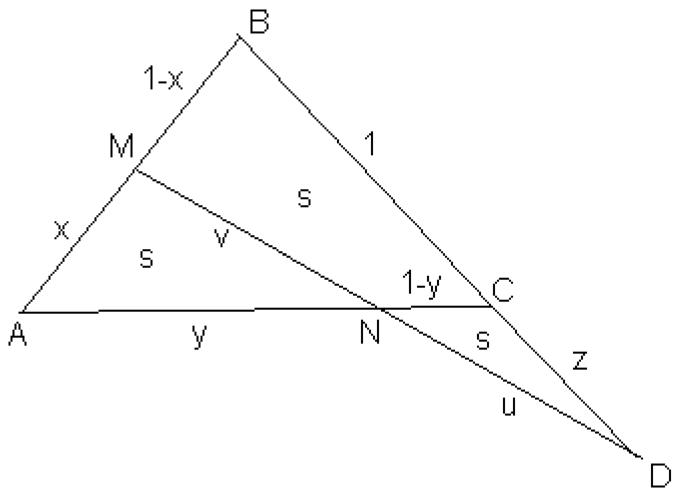
$$4^{2k+3}+165(k+1)-229=16(4^{2k+1}+165k-229)-15\cdot165k+16\cdot229-64=$$

$$=16\left(4^{2k+1}+165k-229\right)-225\cdot11k+16\cdot225.$$

Первое слагаемое делится на 225 по предположению, второе и третье слагаемые также делятся на 225.

Задача 4 Ответ: $AM:MB=2:1,\quad AN:NC=3:1$

Решение.



Пусть S - площадь треугольника ABC. Отношение: $AM:AB=x,\quad AN:AC=y,$ $DC:BC=z,\ DN=u,\ \ NM=v$

$$S_{AMN}=xyS=S:2\to 2xy=1,$$

$$S_{AMN}:S_{NCD}=(yv):((1-y)u)=1\to\frac{u}{v}=\frac{y}{1-y}$$

Теорема Минелая: 1) для треугольника ABC и секущей MD

(обход против часовой стрелки из вершины B)

$$\frac{1-x}{x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1+z}=1\to\frac{y-xy}{x-xy}=1+\frac{1}{z}\to\frac{2y-1}{2x-1}=1+\frac{1}{z}$$

2)для тр еугольника BDM и секущей CA

(обход по часовой стрелке из вершины B)

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{u}{v}\cdot\frac{x}{1}=1\to\frac{u}{v}=\frac{z}{x}\to\frac{z}{x}=\frac{y}{1-y}\to z=\frac{xy}{1-y}=\frac{1}{2(1-y)}$$

$$\frac{2y-1}{2x-1}=1+2(1-y)=3-2y\to 2y-1=(3-2y)(2x-1)=6x-4xy-3+2y\to$$

$$x=\frac{2}{3};\ \ y=\frac{3}{4}\to AM:MB=x:(1-x)=2:1,\ \ AN:NC=y:(1-y)=3:1$$